

Landes-
bibliothek
Coburg

5104 66
d

6/8

/

Encyclopädischer Kursus
der
M a t h e m a t i k,
ein
L e h r b u c h

für den ersten Unterricht der Anfänger und Liebhaber
dieser Wissenschaft,

von

C h r. A r z b e r g e r,

Doctor der Philosophie und öffentlichem Lehrer
am Gymnasium zu Coburg.



Des ersten Theils erste Abtheilung,
die
Arithmetik und das Nöthigste von der Algebra
enthaltend.

Mit einer Beilage von Logarithmischen und andern Tafeln.

C o b u r g u n d L e i p z i g b e y S i n n e r
1 8 0 2.

1813

X

Encyclopädisches Wörterbuch

der

Mathematik

ein

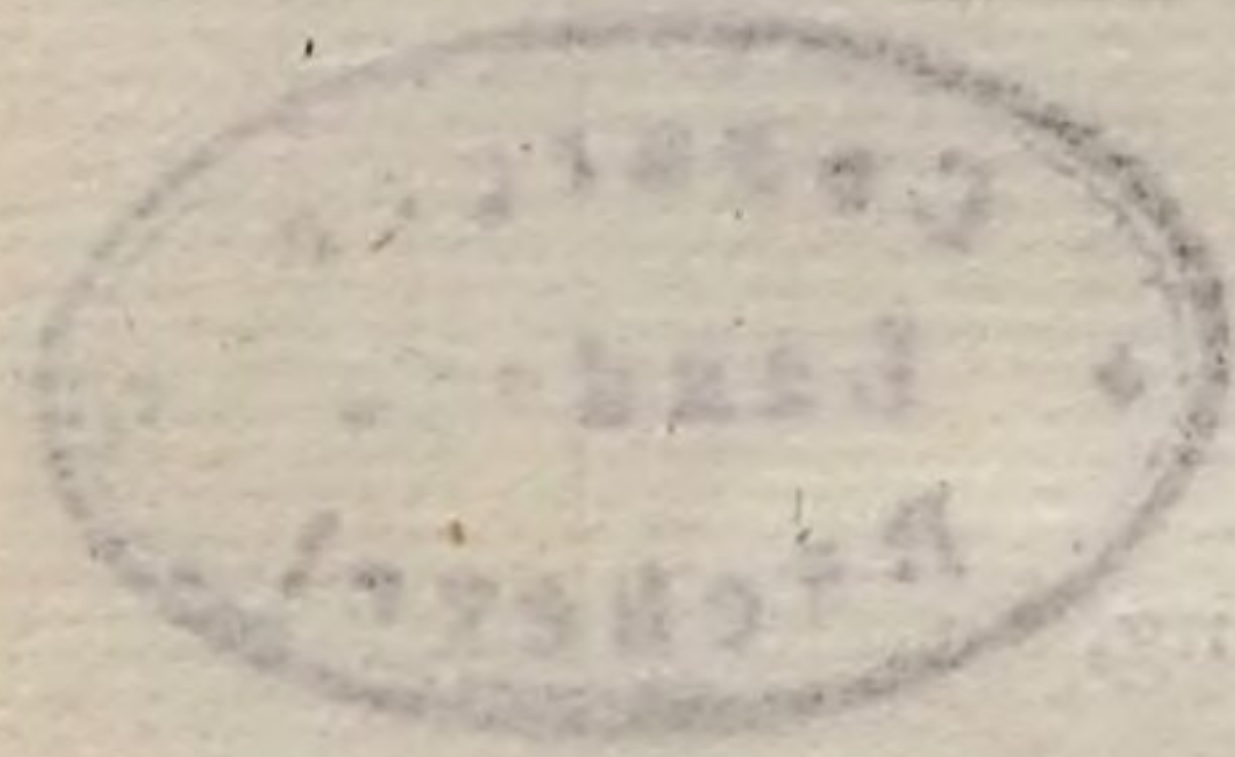
Lehrbuch

für den ersten Unterricht der Mathematik
von Wilhelm Schöler

von

C. H. A. R. S. P. O. R. G. E. R.

Doctor der Philosophie und öffentlichen
am Gymnasium zu Coburg



Das erste Theil enthält

die

Arithmetik und das Nützliche von der Arithmetik

aus dem ersten Theile

Mit einer Beilage von Logarithmen und einem Index

Coburg und Leipzig

1813

Landes-
bibliothek
Coburg

Sr. Hochwohlgebohrn

dem

Herrn von Schuckmann,

P r ä s i d e n t e n

der

Königlich Preussischen Kriegs- und

Domainen - Kammern

in den beiden fränkischen Fürstenthümern

unterthänigst gewidmet

v o m

Verfasser.

St. Hochschule

dem

Heute von Schwestern

P. A. J. G. A. A.

der

Königlich Preussischen Regierung

Domänen-Kammer

in der kgl. Preussischen Provinzial-Verwaltung

Landes-Verwaltung

von

Verfall

V o r b e r i c h t.

Bei meinem Unterrichte über die reine und angewandte Mathematik schien mir ein Theil der vorhandenen Lehrbücher theils für die Gränzen meiner Berufserfüllung zu vielumfassend oder zu kurz, theils für die Fähigkeiten meiner Zuhörer zu schwer oder zu leicht. Hängt auch dieses Urtheil zum Theil von dem Eigenthümlichen der Person und des Ortes ab; so darf ich doch hoffen, daß mehrere, die ebenfalls den Beruf haben, nicht nur in der reinen und angewandten Mathematik Unterricht zu ertheilen, sondern auch ihren Zöglingen so viel Geschmack an der Wissenschaft beizubringen, als zur Fortsezzung des Studiums der

der Mathematik und insbesondere zum nützlichen Gebrauch des academischen Unterrichts erforderlich ist, wenigstens den Plan zu einem Werke billigen, dessen nächste Absicht die Erleichterung dieses Berufes ist. Es sollen nämlich in 2 Theilen, — der zweite wird dem gegenwärtigen an Gröfse ohngefähr gleich seyn — die Anfangsgründe der reinen und angewandten Mathematik so vorgetragen werden, daß der Liebhaber, der an den wichtigen und in das bürgerliche Leben einwirkenden Wahrheiten dieser Wissenschaft mehr als historischen Antheil nehmen will, Befriedigung, und derjenige, der einstens nähern Gebrauch von der Mathematik zu machen gedenkt, den ersten Unterricht findet. Es wird dabei sorgfältig nicht blos der formelle sondern auch der materielle Nuzzen berücksichtigt werden, theils weil die Ansicht, wozu etwas in der Welt zu gebrauchen ist, sehr oft Veranlassung werden kann, es zu erlernen, theils weil es mir überhaupt nützlich scheint, den Schritt vom Wissen zum Anwenden zu erleichtern, und die Tendenz zum Practischen zu befördern.

In

In der ganzen reinen Mathematik soll gerade nur das vorkommen, was zum Verstehen der Lehren des angewandten Theils erforderlich ist. Es war Absicht, daß ich hie und da von der strengen mathematischen Methode abgewichen bin; ich hoffe aber, daß man im Beweissen keine Lücken finden wird, deren Ausfüllung nicht eine Weitläufigkeit erfordert hätte, die gegen den Plan des Ganzen gewesen wäre.

Daß die Verbindung der Buchstabenrechnung mit der gemeinen für den Vortrag viele Erleichterung schafft, sieht jeder denkende Lehrer auf den ersten Blick. Die Logarithmen-Tafeln sind deswegen beigefügt, damit der Anfänger nicht erst, blos um sich zu üben, ein eignes Buch kaufen müsse. Dadurch schmeichle ich mir, etwas zur allgemeineren Verbreitung der Rechnung mit Logarithmen beizutragen. Den Gebrauch derselben wollte ich nicht bis zur Trigonometrie verschieben, um letztere desto mehr zu erleichtern; die Interessen-Rechnung schien mir daher ein schickliches Mittel zu seyn, den Gebrauch der Logarithmen geläufig zu machen. Wer je die
Be-

Bemerkung gemacht hat, daß Anfänger oft gerade zu der Zeit, wenn die Lehre von den Logarithmen erklärt wird, noch keine Tafeln besitzen, oder beym Vortrage und der Anwendung der Trigonometrie noch nicht geläufig mit Logarithmen umgehen können, der wird die Bestimmungsgründe zu dieser Anordnung übersehen.

E i n l e i t u n g.

§. 1.

Begriff der Mathematik.

Die Mathematik oder Gröſſenlehre, iſt die Wiſſenſchaft, Gröſſen aller Art zu ſchätzen und eine durch die andere zu beſtimmen. Gröſſen nennt man alles, was einer Vermehrung oder Verminderung fähig iſt. Jede Gröſſe muß daher aus lauter gleichartigen Theilen zuſammengeſetzt vorgeſtellt werden können.

Die Anzahl dieſer Theile kann ſchon an ſich beſtimmt ſeyn; dann iſt es ein *Quantum discretum* (Zahlengröſſe) und eine ſolche Gröſſe wird durch eine Zahl ausgedrückt. Der gemeinſchaftliche Name jedes einzelnen Theils heiſt die Einheit. Z. B. die Zahlengröſſe 6 Thaler hat den Thaler zur Einheit. (Benannte Zahl).

A

Dieſe

Diese Einheit kann die abstracte *Eins* selbst seyn. Z. B. die Zahl 6 hat eins zur Einheit. (Unbenannte, reine Zahl).

Die Anzahl der Einheiten angeben heist zählen.

Die Anzahl der Theile, aus denen eine Gröſſe besteht, kann auch an sich unbestimmt seyn, so daß kein Theil derselben der absolut kleinste oder einfachste ist; dann hat man eine *stättige* Gröſſe (*Quantum continuum*)

Die Vorstellung stättiger Gröſſen wird zuweilen dadurch möglich, daß man, um die Gröſſe zu erhalten, ihre Theile successive an einander reiht, z. B. Linien, Flächen, Körper, Dauer (Raum und Zeit). Dieses giebt eine *extensive* Gröſſe.

Oder es ist bey der Vorstellung der Gröſſe keine successive Wahrnehmung oder Aneinanderreihung der Theile verſtattet, sondern sie wird auf einmal oder ihrem Grade nach wahrgenommen. Z. B. Stärke des Windes, des Lichtes u. ſ. w. Eine solche Gröſſe heist eine *intensive*.

Bei den stättigen Gröſſen nimmt man willkührliche Theile zur Einheit an, die Anzahl derselben angeben heist messen.

§. 2.

Eintheilung der Mathematik überhaupt.

Wenn die Mathematik mit den Gröſſen an und vor sich beschäftigt ist, und durch Vernunftschlüsse
ihre

ihre Gesezze und Eigenschaften entwickelt, ohne denjenigen Gegenstand aus der wirklichen Welt, an dem die Gröfse wahrgenommen wird, mit in Betrachtung zu ziehen; so heifst sie *reine* Mathematik.

Erfahrungsfätze sind also von ihr ausgeschlossen.

Betrachtet man aber die Gröfsen verschiedener Dinge aus der wirklichen Welt, z. B. Figur und Gröfse der Erde, leitet man aus einigen sichern Beobachtungen und Erfahrungen durch Anwendung der in der reinen Mathematik aufgefundenen Gesezze der Gröfsen neue Wahrheiten ab; so heifst dieses die *angewandte* Mathematik.

§. 3.

Theile der reinen Mathematik.

Die Zahlengröfsen sind der Gegenstand der Arithmetik überhaupt.

Bedient man sich der Buchstaben als allgemeiner Zeichen irgend einer Zahl, um theils den Gang der arithmetischen Operationen gleichsam tabellarisch zu übersehen, theils manche Wahrheiten kürzer und bequemer auszudrücken und zu beweisen; so bedient man sich eines Verfahrens, welches die *Buchstabenrechnung* genennt wird.

Vermöge der Umstände und Bedingungen, die bei einer arithmetischen Beschäftigung obwalten,

mufs man mehrere Gröfsen, theils bekannte theils unbekannte mit einander vergleichen. So etwas giebt eine Gleichung. Die Gleichungen zu behandeln, das Unbekannte daraus zu finden und überhaupt auf diesem Wege neue Wahrheiten zu entdecken ist das Geschäft der *Algebra* (Allgemeine Gröfsenlehre).

Die *Geometrie* beschäftigt sich mit der Ausmessung des Raumes und bestimmt die Eigenschaften derjenigen Gröfsen, die im Raume vorhanden sind. Linien — Flächen — Körper.

Ein besonderer Theil der geometrischen Gegenstände sind die Dreiecke. Man hat Mittel gefunden, die Theile der Dreiecke als Zahlengröfsen auszudrücken und auf dem Wege der Berechnung aus den bekannten Theilen die unbekannten zu finden. Die Wissenschaft, die dieses lehrt, heifst die *Trigonometrie*.

§. 4

Theile der angewandten Mathematik.

Die Mathematik kann auf alle Dinge der Welt, die eine Gröfse haben, angewendet werden. Man hat aber der guten Ordnung wegen sich immer an folgende Classification gehalten.

Die

Die Anwendung derselben

- 1) Auf feste Körper.
 - a) im Gleichgewicht giebt die *Statik*
 - b) in Bewegung -- die *Mechanik*
- 2) auf flüssige Körper.
 - a) im Gleichgewicht -- *Hydrostatik*
 - b) in Bewegung -- *Hydrodynamik und Hydraulik*
- 3) auf die Luft -- *Aërometrie.*
- 4) auf das Licht
 - a) in Rücksicht seines Weges überhaupt -- *Optik*
 - b) in Rücksicht seines Weges, wenn es auf undurchsichtige Körper (Spiegel) fällt -- *Catoptrik*
 - c) wenn es durch durchsichtige Körper geht *Dioptrik*
- 5) Auf das Weltgebäude
 - a) überhaupt -- *Astronomie*
 - b) auf einen speciellen Theil desselben, die Erde -- *Mathematische Geographie*
 - c) auf daraus abgeleitete Mittel,
 - α) die Tageszeit anzugeben -- *Gnomonik*
 - β) Größere Zeiträume einzutheilen -- *Chronologie*
- 6) Auf

6) Auf Gebäude

- | | |
|---|-----------------------|
| a) zu bürgerlicher Absicht | <i>Civilbaukunst</i> |
| b) zur Vertheidigung im Kriege | <i>Kriegsbaukunst</i> |
| c) auf die Zerstörungswerkzeuge, gegen welche die Kriegsbaukunst sichern soll | <i>Geschützkunde</i> |

§. 5.

Anschauliche Gewissheit der rein-mathematischen Wahrheiten.

Es ist bekannt, daß sich die Mathematik, vorzüglich die reine, einer Evidenz zu erfreuen hat, die außer ihr keiner andern Wissenschaft zukommen kann. Der Anfänger erfährt dieses freilich am besten durch das fortgesetzte Studium derselben. Indessen wird es gut seyn, vorbereitungsweise zu wissen, daß sich diese Evidenz auf *Erklärungen* (*Definitionen*) *Grundsätze* (*Axiome*) und *Beweise* gründet.

Durch die Erklärungen, die in der reinen Mathematik aufgestellt werden, und die entweder Wort- oder Sach-Erklärungen sind, wird der Begriff eines Dinges so genau begränzt dargestellt, daß er von einem jeden ganz genau so und nicht anders aufgefaßt werden muß.

Wird z. B. ein Kreis als eine krumme Linie erklärt, die so entsteht, daß ein Punct sich um einen andern

andern festen Punct in beständig gleicher Entfernung so lange herum bewegt, bis er wieder an seine erste Stelle gelangt; so kann bei keinem einzelnen Individuum eine Verschiedenheit im Begriffe des Kreises entstehen. Jeder kann sogar seinen Begriff, bloß der aufgefaßten Erklärung zu Folge und ohne noch ein Muster aus der wirklichen Welt gesehen zu haben, durch eine hinlänglich befriedigende sinnliche Abbildung darstellen (seinen Begriff construiren). Dieses ist bei Erklärungen in andern Wissenschaften der Fall nicht; man denke nur an Definitionen von Tugend, Glückseligkeit, Aufklärung. Welche Verschiedenheit der Begriffe bei einzelnen Individuen!

In den mathematischen Grundfätzen liegt eine allgemeingültige von aller Erfahrung unabhängige Gewissheit, die sich selbst anschaulich macht, so bald man die Erklärung davon vorher gefaßt hat. Der Grundsatz „alle Halbmesser eines Kreises sind gleich“ wird von Niemand bestritten werden können, auch von dem nicht, der gar noch keine Abbildung des Kreises und des Halbmesser gesehen hätte, diejenige etwa ausgenommen, welche er sich der Erklärung zu Folge selbst hat machen können. Welche Grundfätze aber haben andere Wissenschaften aufzuweisen, welche nicht bestritten worden, oder so allgemein, so unbedingt wahr, und so allen Zweifeln und Zweideutigkeiten entnommen wären?

Hat

Hat man gezeigt, daß eine Wahrheit oder ein Satz vermittelt allgemeingültiger Grundsätze aus dem Begriffe eines Dinges oder mehrerer durch Schlüsse abgeleitet werden konnte; so hat man diese Wahrheit bewiesen, und der Satz, der sie ausdrückt, heißt ein *Lehrsatz*. Der Beweis beruht also auf Erklärungen und Grundsätzen, von deren Richtigkeit und Anschaulichkeit hängt seine Schärfe ab.

§. 6.

Lehrweise der Mathematik.

Die Art und Weise, durch welche der Mathematiker zur Ueberzeugung seiner Sätze gelangt, erhellt aus dem Vorigen.

Begreiflich ist, daß die Sätze in einer solchen Ordnung vorgetragen werden, wie sie aus einander folgen, so daß diejenigen vorangeschickt werden, in denen die Gründe zu den folgenden liegen.

Aus dem Beweise eines Lehrsatzes geht zuweilen noch eine andere merkwürdige Wahrheit hervor und diese wird unter dem Namen eines *Zusatzes* beigelegt.

Inzwischen beschränkt sich die Mathematik nicht auf bloßes Wissen. Da sie auf so vielerlei Gegenstände der Welt angewendet wird, so wird man
öfters

öfters etwas auszuüben oder zu bewerkstelligen verlangen.

Bei einigen Fällen fällt nicht nur die Möglichkeit, sondern auch die Art und Weise, das Verlangte mit Sicherheit auszuführen, geradezu und unwidersprechlich in die Augen. Der Satz, durch den man das Verlangte ausdrückt, heißt eine *Forderung* (Postulat).

Bei andern Fällen bedarf sowohl die Möglichkeit des Verlangten, als auch die Art und Weise der Ausführung einer genauern Darstellung, um zu eben der augenscheinlichen Gewissheit zu gelangen. Dann heißt das Verlangte eine *Aufgabe*, die Ausführung aber die *Auflösung*.

A r i t h m e t i k.

§. 7.

Erklärungen.

1. *Erklärung.*

Jede Zahl kann vermehrt und vermindert werden. (§. 1). Geschieht die Vermehrung so, daß eine Zahl mit einer oder mehreren andern zusammen gedacht, und der Betrag von allen durch eine einzige Zahl ausgedrückt wird; so heißt diese letzte Zahl die *Summe* und die ganze Operation *addiren*.

Bei-

Beispiel.

Drei, Zwei und Vier zusammengedacht giebt eine Anzahl von Einheiten die sich durch die einzige Zahl Neun ausdrücken lassen.

2. *Erklärung.*

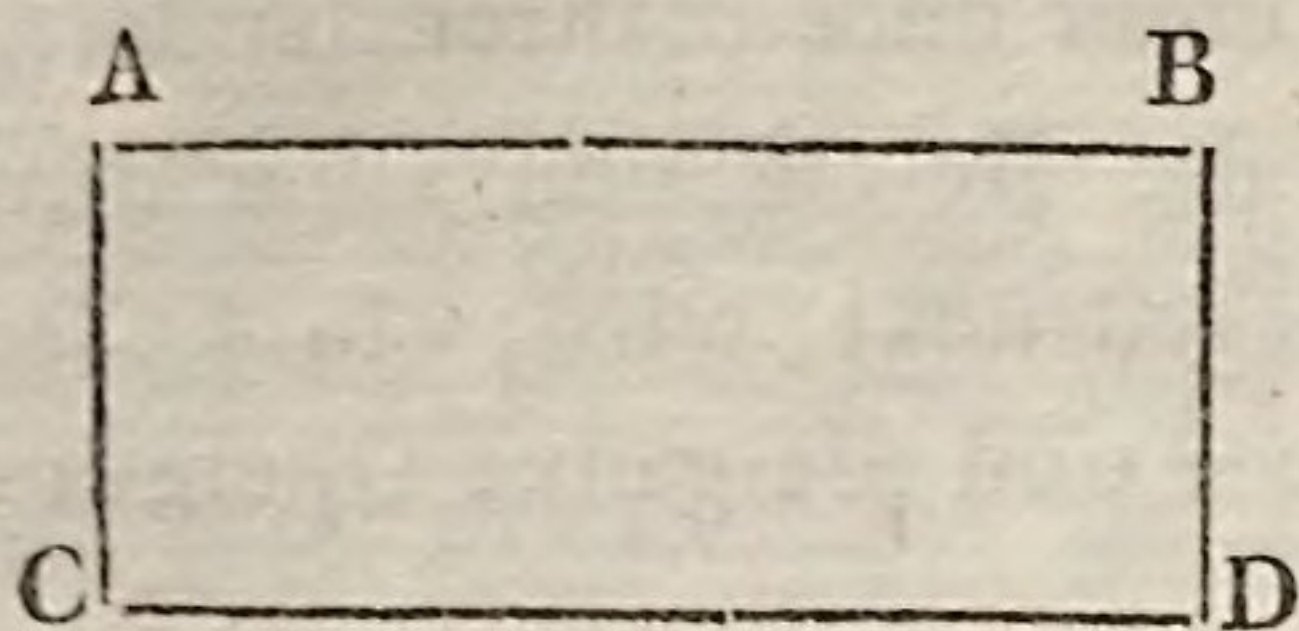
Geschieht die Vermehrung so, daß eine Zahl zu sich selbst etliche Male addirt wird, so heißt eine solche Summe das *Product*, die Operation aber *multipliciren* oder vervielfachen. Das *Product* kommt also von zwei Zahlen her, erstlich von der, die man etliche Male zu sich addirt, und zweitens, von der, welche so viele Einheiten enthält, als oft man die erste zu sich selbst addirt. Diese zwei Zahlen heißen *Factoren*.

Zusatz. 1.

Multipliciren heißt also auch so viel: den einen Factor so vielmal nehmen, als die Einheit im andern steckt.

Zusatz. 2.

Ein sinnliches Bild kann man sich vom Multipliciren durch folgende Figur machen,



wo die Linie AB einen Factor vorstellt, und zwar eine Zahl, die so groß oder so klein ist, als man will, da AB in eine willkürliche Anzahl gleicher Theile getheilt werden kann.

Diese als Zahl gedachte Linie AB stelle man nun in mehrern Lagen etliche Male neben einander vor, so daß CD die letzte Lage ist.

Unter AC oder unter BD kann man sich eben so die Zahl denken, die anzeigt, wie oft man den ersten Factor AB neben einander gelegt hat; so stellt also AC den andern Factor vor.

Die Figur ABCD bildet das Product.

Zusatz. 3.

Vermöge des 2ten Zusatzes kann man sich auch AC als den ersten Factor und AB als den zweiten vorstellen, und es bleibt das nämliche Product. Die Ordnung der Factoren ist also willkürlich.

Beispiel.

Die Drei zweimal genommen giebt das Product 6. Die Zwei dreimal genommen giebt dasselbe Product.

3. Erklärung.

Eine Verminderung findet Statt, wenn von einer Zahl eine kleinere weggenommen wird. Was übrig bleibt,

bleibt, heisst der *Rest* auch der *Unterschied* (Differenz). Die Operation heisst subtrahiren.

Anmerkung.

Durch eine Linie kann man sich wieder ein sinnliches Bild schaffen.

A C B

Wenn nämlich von AB das Stück CB weggenommen wird; so ist der Rest oder Unterschied AC.

Ist die Linie AB in zwölf, BC in fünf und folglich AC in sieben Theile getheilt; so hat man das Beispiel: von *zwölf* weggenommen *fünf*, bleibt *sieben* als Rest: oder die Zahlen *zwölf* und *fünf* haben unter sich den Unterschied *sieben* d. i. sind von einander um sieben Einheiten unterschieden.

4. Erklärung.

Wenn von einer Zahl eine kleinere etliche Mal abgezogen wird, und zwar so lange, bis kein Abzug mehr möglich ist, so heisst dieses Verfahren *dividiren*. Die Zahl, von welcher der Abzug geschieht, heisst der *Dividend*; die Zahl, die abgezogen wird heisst der *Divisor*, und die Zahl, welche die Anzahl der erfolgten Abzüge angiebt, der *Quotient*.

Zusatz, 1.

Der Divisor kann also als ein Theil des Dividen-
den angesehen werden; der Quotient zählt die An-
zahl

zahl der Theile: oder: der Divisor ist so oft im Dividenden enthalten, als die Einheit im Quotienten.

Zusatz. 2.

Multipliziert man daher den Divisor mit dem Quotienten; so kommt der Dividend als Product heraus. Denn nach dem vorigen Zusatz kommt der Dividend heraus, wenn man den Divisor so oft nimmt, als die Einheit im Quotienten steckt.

Zusatz. 3.

Wenn man ein Product durch einen Factor dividirt, so kommt der andere Factor als Quotient heraus: denn der Dividend ist nach dem vorhergehenden Zusatz eben das Product aus diesen zwei Factoren.

Anmerkung.

Diese vier arithmetischen Operationen sind unter dem Namen der vier *Species* bekannt.

5. Erklärung.

Zu mancherlei Absichten ist es vortheilhaft, die eben genannten arithmetischen Operationen bloß zu bezeichnen. Diese Zeichen sind folgende:

$2 + 3$ heißt die Summe von 2 und 3.

$8 - 5$ der Unterschied der Zahlen 8 und 5
oder der Rest, wenn 5 von 8 abgezogen wird

$2 \cdot 3$

$2 \cdot 3$ heisst das Product aus den Factoren 2 und 3.
 $8:2$ ist der Quotient, wenn der 8 als Dividend
 mit 2 als Divisor dividirt wird: auch $\frac{8}{2}$.

Noch ist aufser diesen das Zeichen der Gleichheit zu bemerken. Seine Figur ist $=$: und sein Gebrauch erhellt aus folgenden Beispielen.

$$8:2 = 4$$

$$2 \cdot 3 = 6 \text{ u. f. w.}$$

Zusatz. 1.

Bedient man sich nach §. 3 der Buchstaben als allgemeiner Zeichen einer Zahl, so gross oder so klein als man will; so sieht man, wie eben so $a + b$ die Summe von a und b bezeichnet und $a - b$ den Rest, wenn man b von a abzieht. Ferner $a \cdot b$ oder auch bloß ab das Product von a und b und $a:b$ den Quotienten, wenn a der Dividend und b der Divisor ist.

Zusatz. 2.

Man kann diese Summen, Differenzen, Producte und Quotienten ebenfalls durch einzelne Buchstaben bezeichnen z. B. die Summe von a und b ($a + b$) durch s . Diese Annahme bezeichnet man so $a + b = s$.

Eben so versteht man die Ausdrücke:

$$a - b = d$$

$$ab = f$$

$$a:b = q.$$

Zusatz.

Zufaz. 3.

Vorausgesetzt, daß die Buchstaben s, d, f, q das bedeuten, was im vorhergehenden Zufaz angenommen wurde; so heißt $s - b = a$ folgendes: Wenn man von der Summe zweier Gröfsen (s) eine (b) wieder abzieht; so bleibt die andere (a) als Rest.

$d + b = a$ heißt: wenn man zur Differenz (d) die Gröfse die man abgezogen hatte (b) addirt; so kommt die Gröfse, von der man abgezogen hatte, (a) als Summe heraus

$f : a = b$ bezeichnet eben das, was Erkl. 4. Zufaz 3 sagt.

$f : b = a$ das Nämliche. Der Ausdruck selbst ist eine Folge des vorigen, weil $ab = f$; auch $ba = f$ seyn muß. Erkl. 3. Zuf. 3.

$q . b = a$ Siehe Erkl. 4. Zuf. 2.

Zufaz. 4.

$f : a = b$ heißt nach Erkl. 4. Zuf. 1. a ist der bte Theil von f . Wenn aber $f : a = b$; so ist auch $f : b = a$ (Zuf. 3.) das heißt wieder b ist der ate Theil von f .

Daher kann man sich beim Ausdruck $f : a = b$ beiderlei Arten von *Theilung* denken. Beispiel $12 : 4 = 3$ heißt nach Erkl. 4. Zuf. 1 „4 ist der dritte Theil von 12“, kann aber auch heißen „3 ist der 4te Theil 12“.

An-

Anmerkung.

Der Anfänger kann schon hier einen dreifachen Nuzzen dieser Bezeichnungen bemerken.

- 1) Durch dieselben werden nicht blofs Summen, Differenzen, Producte und Quotienten bezeichnet; sondern auch immer ihre einzelnen Bestandtheile.
- 2) Durch sie werden Sätze, wie z. B. in Zuf. 3 enthalten sind, kürzer ausgedrückt, als man sie gewöhnlich mit Worten schreiben kann.
- 3) Durch eben diese Kürze wird es möglich, eine Reihe von Schlüssen viel leichter zu übersehen. Zuf. 4. ist schon einiger Mafsen ein Beispiel dazu.

§. 8.

Zahlenfytem.

Willkührliche Anordnung.

Die neun Ziffern 1 9 entsprechen den Zahlen *eins* *neun*. Um gröfsere Zahlen damit schreiben zu können giebt man ihnen verschiedene Werthe, je nachdem sie eine verschiedene Stelle einnehmen. Dabei kommt es auf folgende willkührliche Sätze an.

- 1) Die Stellen werden von der Rechten zur Linken gerechnet.

2)

- 2) Die hinterste Stelle heisst die Stelle oder Ordnung der Einer. Eine Ziffer die in dieser Ordnung vorkommt, stellt eine Zahl vor, die gleichsam *eins* selbst zur Einheit hat, und bezeichnet so viel Einheiten, als die Ziffer ansetzt.
- 3) Die erste Ordnung links neben der hintersten heisst die Ordnung der Zehner. Sie giebt einer Ziffer zehnmal mehr Werth, als wenn sie in der Ordnung der Einer stünde.
- 4) Die zweite Ordnung von der hintersten an gerechnet, heisst die Ordnung der Hunderte. Eine Ziffer in dieser Ordnung hat zehnmal mehr Werth, als sie in der Ordnung der Zehner, und hundertmal mehr, als sie in der Ordnung der Einer haben würde.
- 5) Eben so ist die 3te Ordnung die Ordnung der Tausende. Eine Ziffer in dieser Ordnung ist gleich dem zehnfachen derselben Ziffer in der Ordnung der Hunderte, dem Hundertfachen derselben in der Ordnung der Zehner, und dem Tausendfachen derselben Ziffer in der Ordnung der Einer. u. s. w.
- 6) Ziffern von der Ordnung der Einer werden einstweilen mit einem darüber geschriebenen 0 bezeichnet. Die Ordnung der Zehner führt eben so eine 1 (gleichsam die erste Ordnung von den *Einern* an gezählt), die Ordnung der
B Hun-

Hunderte wird mit 2 bezeichnet und heißt die 2te Ordnung. So ist die 3te Ordnung die Ordnung der Tausende. Die 4te die Ordnung der Zehntausende, Die 6te die Ordnung der Millionen. u. f. w.

7) Zehn Einheiten machen also einen Zehner. Zehn Zehner oder Hundert Einer einen Hunderter. Zehn Hunderte, oder hundert Zehner, oder tausend Einer, einen Tausender u. f. w.

8) Ordnungen, die leer stehen sollen, müssen mit einer Null (0) bezeichnet werden.

Anmerkung. 1.

Wie diesem zufolge Zahlen geschrieben und ausgesprochen werden müssen, lehrt einiges Nachdenken von selbst.

Beispiel.

Die Zahl 368507 ist $\overset{5}{= 3} + \overset{4}{6} + \overset{3}{8} + \overset{2}{5} + \overset{1}{0} + \overset{0}{7}$
d. i. 3 Hunderttausende, 6 Zehntausende, 8 Tausende, 5 Hunderte, keine Zehner und 7 Einer u. f. w.

Anmerkung. 2.

Die in Nro. 6 gegebenen Zeichen der Ordnungen, die man auch *Ordnungs-Exponenten* zu nennen pflegt, sind zwar an sich willkürlich, es wird sich aber in der Folge zeigen, daß sie andern arithmetischen Zeichen gemäß sind.

An-

Anmerkung. 3.

Dieses Zahlensystem führt den Namen des *Decimal-Systems* und wird bei allen cultivirten Nationen gebraucht.

§. 9.

Aufgabe.

Man verlangt mehrere Zahlen zu addiren, die mit mehrern Ziffern geschrieben werden.

Auflösung.

- 1) Man schreibe die verschiedenen Zahlen so unter einander, daß Einer unter Einern, Zehner unter Zehnern u. s. w. kurz einerlei Ordnungen unter einander stehen, und formire die einzelnen Summen von einerlei Ordnungen.
- 2) Da diese einzelnen Summen öfters mehr als Zehn betragen können; so bringe man dem Decimalsystem gemäß das Zehnfache in die nächst höhere Ordnung, damit diese einzelnen Summen eine Zahl bilden, die nach der Einrichtung des Decimalsystems geschrieben ist. Die Zahl ist die gesuchte Summe.

Beweis.

Die gegebenen Zahlen enthalten Einer, Zehner, Hunderte u. s. w. Nach 1 hat man der Einer,

B 2

Zeh-

Zehner u. f. w. einzelne Summen. Nach 2 bekommt man die Summe dieser einzelnen Summen, folglich den Betrag aller gegebenen Zahlen durch eine Zahl ausgedrückt d. i. ihre Summe.

Beispiel.

Man verlangt die Summe von 378504; 83291 und 170382

378504

83291

170382

$$\begin{array}{rcl}
 7 \text{ Einer} & = & 7 \\
 17 \text{ Zehner} & = & 10 + 7 = 17 \\
 10 \text{ Hunderte} & = & 10 = 10 \\
 11 \text{ Taufende} & = & 10 + 1 = 11 \\
 22 \text{ Zehntaufende} & = & 10 + 10 + 2 = 22 \\
 4 \text{ Hunderttaufende} & = & 4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 6 \ 5 \ 4 \ 4 \ 3 \ 3 \ 2 \ 1 \ 0 \\
 4 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 7 + 7 \\
 5 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1 \ 0 \\
 = 6 + 3 + 2 + 1 + 7 + 7 = 632177.
 \end{array}$$

Anmerkung. 1.

Die Abkürzung dieser Auflösung ist bekannt genug; auch fällt in die Augen, daß sie mit der hier gezeigten auf eins hinauskommt.

An-

Anmerkung. 2.

Die Rechnung mit benannten Zahlen hat keine andern Gesezze, als die eben gezeigten, nur der einzige Unterschied findet Statt, daß die nächsthöhere Classe nicht grade zehnmal mehr ist, als die nächstniedrigere, wie dieses der Fall bei den unbenannten Zahlen im Decimalsystem ist.

Beispiel.

Man will die Summe von nachfolgenden Gröſſen wissen.

Thlr. Gr. Pf.

17 18 10

9 20 5

14 13 8

5 19 7

30 Pf. = 24 Pf. + 6 Pf. = 2 Gr. 6 Pf.

170 Gr. = 24 G + 24 G + 22 Gr. = 2 T. 22 G.

45 = - - - - - 45 T.

47 T. 24 G. 6 Pf.

= 48 T. 0 G. 6 Pf.

Subtraction.

§. 10.

Aufgabe.

Man verlangt die Differenz der Zahlen, die mit mehrern Ziffern geschrieben werden.

Auf.

Auflösung.

- 1) Man schreibt die Zahlen in der Ordnung unter einander, wie §. 9 zeigt und formirt die einzelnen Reste der Einer, Zehner etc.
- 2) Da sichs öfters treffen wird, daß die Ziffer, von der abgezogen werden soll, kleiner ist, als die abzuziehende, oder gar keine geltende Ziffer in dieser Stelle da ist; so bringe man eine Einheit aus der nächst höhern Classe in die mangelhafte Stelle herüber, wo sie 10 gilt so läßt sich die partial Differenz angeben. Die Summe der einzelnen Partial - Differenzen giebt die gesuchte Differenz.

Beweis.

Liegt in der Auflösung selbst, und ist dem §. 9 gegebenen ganz analog.

Beispiel.

Man verlangt den Rest, wenn 78941 von 98004 abgezogen wird.

$$\begin{array}{rcll}
 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\
 98004 & = & 9 & + & 8 & + & 0 & + & 0 & + & 4 & = & 8 & + & 18 & + & 0 & + & 0 & + & 4 \\
 & & 4 & & 3 & & 2 & & 1 & & & & 4 & & 3 & & 2 & & 1 \\
 & & = & 8 & + & 17 & + & 10 & + & 0 & + & 4 & = & 8 & + & 17 & + & 9 & + & 10 & + & 4 \\
 78941 & = & & & -- & & -- & & & & & & 7 & + & 8 & + & 9 & + & 4 & + & 1 \\
 \hline
 19063 & = & & & -- & & -- & & & & & & 1 & + & 9 & + & 0 & + & 6 & + & 3
 \end{array}$$

An.

Anmerkung.

Was in Anmerk. 2. §. 9. von benannten Zahlen gesagt wurde gilt auch hier.

Beispiel.

Von 18 Thal. 0 Gr. 7 Pf. wird abgezogen

9 3 10 Pf.

Da ist nämlich

18 Thal. 0 Gr. 7 Pf.	=	17 Thal. 24 Gr. 7 Pf.
	=	17 23 19
9 3 10 8 20 9	=	9 3 10 8 20 9

Multiplication.

§. 11.

Aufgabe.

Man soll die Producte aller einziffrigen Zahlen angeben, und des fernern Gebrauchs willen in eine Tafel ordnen.

Auflösung.

- 1) Man schreibe alle einziffrigen Zahlen in grader Linie hin.
- 2) Unter jeder derselben setze man ihr Zweifaches, Dreifaches, bis Neunfaches was man jedesmal auf mancherlei Weise durch Addiren findet.

Pytha.

(Pythagoräisches Täfelchen).

Einfaches	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Zweifaches	2	4	6	8	10	12	14	16	18
	3	6	9	12	15	18	21	24	27
	4	8	12	16	20	24	28	32	36
	5	10	15	20	25	30	35	40	45
	6	12	18	24	30	36	42	48	54
	7	14	21	28	35	42	49	56	63
	8	16	24	32	40	48	56	64	72
	9	18	27	36	45	54	63	72	81

§. 12.

Aufgabe.

Man sucht das Product einer vielziffrigen Zahl mit einer einziffrigen.

Auflösung.

Von den Einern, Zehnern u. s. w. der vielziffrigen Zahl nimmt man vermittelst voriger Tafel, (die man bald dem Gedächtnisse einprägt) ein so Vielfaches als der zweite einziffrige Factor anzeigt; dieses giebt einzelne Partial-Producte von Einern, Zehnern etc., die, nach dem Decimalsystem geschrieben, das gesuchte Product geben.

Beispiel.

$$\begin{array}{rcl}
 79835 & = & \begin{array}{cccccc} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 7 & + & 9 & + & 8 & + & 3 & + & 5 \end{array} \\
 \hline 7 & & \hline 558845 & = & \begin{array}{cccccc} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 49 & + & 63 & + & 56 & + & 21 & + & 35 \end{array}
 \end{array}$$

Der

Der Beweis liegt wieder in der Auflösung selbst. Denn das Vielfache eines Einers giebt mehrere Einer, das Vielfache eines Zehners mehrere Zehner u. s. w. Da man das Vielfache von einer Zahl verlangt; so verlangt man das Vielfache aller seiner Theile. Diese Partial-Producte geben also das gesuchte Product.

Zusatz,

Es erhellt daraus, daß eine Ziffer von der Ordnung der Zehner zehnmal mehr zum Product giebt, als wenn ich dieselbe Ziffer, in der Ordnung der Einer mit der nämlichen Zahl multiplicirt hätte, d. h. 20. 3 ist 10mal mehr als 2. 3 oder $20. 3 = 2. 3. 10$. Da nun die Ordnung der Factoren willkürlich ist (§. 7. Erklär. 2. Zuf. 5.) so folgt auch daß eine gewisse Zahl zehnmal mehr giebt, wenn ich sie mit einer andern Zahl von der Ordnung der Zehner, als wenn ich sie mit derselben Zahl von der Ordnung der Einer multiplicire, d. i. 3. 20. ist 10mal mehr, als 3. 2, oder $3. 20 = 3. 2. 10$. Dasselbe gilt nun auch von der Ordnung der Hunderte, der Tausende u. s. w. und es ist z. B. 3. 200. hundertmal mehr als 3. 2. u. s. w.

§. 13.

Aufgabe.

Eine vielziffrige Zahl A mit einer vielziffrigen B zu multipliciren.

Auf-

Auflösung.

- 1) Man multiplicire die Zahl A mit der Ziffer, die bei der Zahl B in der Ordnung der Einer steht und schreibe das Product nach der Ordnung des Decimalsystems darunter. (§. 12).
- 2) Dann multiplicire man eben so die Zahl A mit der Ziffer, die sich bei der Zahl B in der Ordnung der Zehner befindet, schreibe aber das ganze Product um eine Stelle weiter von der rechten gegen die linke Hand.
- 3) Dasselbe verrichte man mit der Ziffer die in der Ordnung der Hunderte steht, und schreibe das Product wieder um eine Stelle weiter nach links zu. So mit den Tausendern, Zehntausendern u. f. w.
- 4) Diese einzelnen Producte addire man, die Summe giebt das verlangte Hauptproduct.

Beweis.

Man verlangt offenbar die Zahl A 1) etliche Male 2) etliche Zehnmale 3) etliche Hundertmale u. f. w. Das erste erhält man in Nr. 1. Das zweite in 2. Das dritte in 3. u. f. w.

Das erste ist klar aus §. 12.

Dass das zweite in 2 gehörig erreicht wird; erhellt also. Wenn ich A mit einer Zahl multiplicire, die

die in der Ordnung der Zehner steht; so muß das Product 10mal mehr seyn, als wenn letztere Zahl nur ein Einer gewesen wäre. (§. 12. Zusatz.) Das durch Multiplication (nach §. 12) gefundene Product muß also erst verzehnfacht werden und dies geschieht, wenn man die hinterste Ziffer in die Ordnung der Zehner setzt; so hat man die Zahl A etliche Zehnmale.

Das 3te geschieht aus demselben Grunde im 3ten Theil der Auflösung. Da nun das gesuchte Product die Zahl A etliche Male, etliche Zehnmale, etliche Hundertmale etc. enthalten soll; so muß man die gefundenen Partialproducte addiren, welches in 4 geschieht.

Beispiel.

A = 3785 soll mit B = 328 multiplicirt werden.

$$\begin{array}{r}
 3785 \\
 \underline{8} \\
 30280
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 3785 \\
 \underline{2} \\
 7570
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 3785 \\
 \underline{3} \\
 11355
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 30280 = 8\text{mal } A \\
 7570 = 20\text{mal } A \\
 11355 = 300\text{mal } A \\
 \hline
 1241480 = 328\text{mal } A
 \end{array}$$

Zusatz. 1.

2.5 = 6. Aus §. 12. Zuf. folgt, daß deswegen

¹20.3 = 3.20 = 60, ferner, daß 30.20 = 600.

Oder wenn p und q Ziffern bedeuten und p.q = r

ist; so ist ¹p.q = ¹r und ¹p.¹q = ²r; ferner ²p.¹q = ³r;

³p.q

$\overset{3}{p} \cdot \overset{1}{q} = \overset{4}{r}$ u. f. w. Ferner $\overset{3}{p} \cdot \overset{2}{q} = \overset{5}{r}$; $\overset{3}{p} \cdot \overset{3}{q} = \overset{6}{r}$; und
überhaupt $\overset{n}{p} \cdot \overset{m}{q} = \overset{n+m}{r}$.

Beispiel.

3600 soll mit 18000 multiplicirt werden.

$$\begin{array}{r} 3600 = \overset{2}{36} \\ 18000 = \overset{3}{18} \end{array} \quad \begin{array}{r} 18 \\ 36 \\ \hline 108 \\ 54 \\ \hline 648 \end{array}$$

Weil $\overset{0}{18} \cdot \overset{0}{36} = \overset{0}{648}$; so ist $\overset{2}{36} \cdot \overset{3}{18} = \overset{5}{648} = 64800000$.
Dieses zeigt, wie man die Arbeit abkürzt, wenn
bei beiden Factoren hinten Nullen vorkommen.

Zusatz. 2.

$(a + b) \cdot c$ heisst offenbar das c fache nicht bloß
von a , und von b allein sondern von beiden zu-
gleich, das c fache a ist aber $= ac$ (§. 7. Erkl. 5. Zuf. 1.)
und das c fache b ist $= cb$ also ist $(a + b) \cdot c =$
 $ac + bc$.

Zusatz. 3.

Hieraus ergibt sich, was $(a + b) \cdot (c + d)$ be-
deutet. Man setze einmal $(a + b) = S$; so ist
 $(a + b) (c + d) = S(c + d) = Sc + Sd = (a + b)c +$
 $(a + b)d = ac + bc + ad + bd$.

Divi-

Dividiren.

§. 14.

Lehrsatz.

Wenn p , q und r Zahlen bedeuten, unter denen wenigstens q und p einziffrig sind und zwar von

der Beschaffenheit, daß $r:p = q$ so ist $\frac{r}{p} = q$.

Beweis.

r ist *) $100 \dots 0$ mal größer als r , es muß also auch der p te Theil von r $100 \dots 0$ mal größer seyn als der p te Theil von r . Heißt daher dieser letztere q ; so ist der erstere q .

Beispiel.

Weil $6:2 = 3$; so ist $600:2 = 300$.

§. 15.

Aufgabe.

Eine vielziffrige Zahl A durch eine einziffrige p zu dividiren.

Auf-

*) Es soll mit dieser Bezeichnung angedeutet werden, daß n Nullen neben einander stehen.

Auflösung.

A besteht aus Einern, Zehnern, Hunderten u. s. w. Man suche daher den Quotienten aus der höchsten Ordnung des Dividenden, wenn er drinnen enthalten ist. Ist er nicht drinnen enthalten, so muß man ihn mit der nächstniedrigen Ordnung zusammen nehmen und aus dieser nächstniedrigern Ordnung den Quotienten finden. So sucht man successive die Quotienten aller nächstniedrigern Ordnungen herab bis auf den Quotienten der oten. Alle diese einzelnen Quotienten zusammen genommen sind $= A : p$.

Nicht immer aber wird sich die Anzahl der Tausende, Hunderte u. s. w. ohne Rest dividiren lassen. Dann behält man nur immer das pfache des Quotienten in dieser Ordnung des Dividenden bei, der Rest mit zur nächstniedrigern Ordnung gezogen.

Da die Summe aller Theile von A selbst $= A$ sind; so sind auch die pten Theile aller dieser Theile von A dem pten Theil von A selbst gleich. Man findet also auf diese Art den richtigen Quotienten.

Beispiel.

A sey 605856 und $p = 8$. So ist $603856 =$
 $\overset{5}{6} + \overset{4}{0} + \overset{3}{3} + \overset{2}{8} + \overset{1}{5} + \overset{0}{6}$. Da nun 8 in 6 gar
 nicht enthalten ist; so stelle man die Zahl so vor
 $=$

$= 60 + 3 + 8 + 5 + 6$. Läßt man zur Gewinnung des Raumes die Ordnungs-Exponenten weg (§. 8. Anm. 2.) so steht die ganze Rechnung so

P	A	
8	60	3856
8.7 =	<u>56</u>	70000
	43	5000
8.5 =	<u>40</u>	400
	38	80
8.4 =	<u>32</u>	2
	65	75482
8.8 =	<u>64</u>	
	16	
8.2 =	<u>16</u>	
	0	

8 ist in 60 nur 7mal enthalten also $7 \times 8 = 56$, Das 8fache von 7 ist 56, wobei ein Rest von 4 bleibt. Nun ist $4 + 3 = 43$, davon ist der Quotient 5, wobei nach Abzug des

8fachen 5 der Rest 3 bleibt. $3 + 8 = 38$. Der Quotient davon ist 4, der Rest 6. $6 + 6 + 5 = 65$, wovon der Quotient 8 ist, und den Rest 1 übrig läßt. Von 16 ist endlich 2 der Quotient. Die Summe aller dieser Partial-Quotienten ist $7 + 5 + 4 + 8 + 2 = 75482$.

Die gewöhnliche Abkürzung ist bekannt, auch fällt in die Augen, daß man die gefundenen Theile des Quotienten nur in der Ordnung fortschreiben dürfe, wie man sie findet, ohne weitere Rücksicht auf ihre Ordnung zu nehmen.

Zusatz.

Zusatz.

Wenn man den Gang dieser Rechnung genau ansieht, so findet man, daß die ganze Operation darinnen besteht.

- 1) Man nimmt so viele Ziffern der höchsten Ordnung, als nöthig sind, um den Divisor etliche Male zu enthalten, Durch Rathen, wobei die Einmaleins - Tafel Hülfe leistet, findet man den ersten Theil des Quotienten.
- 2) Wenn man diesen Partial - Quotienten mit dem Divisor multiplicirt so, erhält man erstlich die Versicherung, ob der Quotient richtig errathen ist, und zweitens den Rest. Ist nämlich dieser Rest größer als der Divisor, so hat man eine zu kleine Zahl für den Quotienten genommen, und eine zu große, wenn man das Product des Divisors mit dem Quotienten gar nicht abziehen könnte.
- 3) Der Rest und die folgende nächst niedrigere Ziffer werden aufs neue mit dem Divisor dividirt. Mit dem jetzt gefundenem Theile des Quotienten und dem Rest wird wieder so verfahren. Mit der ganzen Procedur wird so lange fortgefahren, bis man zur niedrigsten Ziffer des Quotienten kömmt.
- 4) Ist irgendwo der Rest mit der nächstniedrigern Ziffer des Dividenden kleiner als des Divisor, so

so ist der Partial-Quotient dazu $= 0$, womit man gerade so verfährt, als wenn es eine bedeutende Ziffer gewesen wäre.

Die Anwendung der so ausgedrückten Vorschrift kann nun auch auf solche Fälle gemacht werden, wo der Divisor aus mehreren Ziffern besteht

Beispiel.

P	A
²⁴³	785 3 9 6 6 32362
3.p =	<u>729</u>
	563
2.p	<u>486</u>
	879
3.p	<u>729</u>
	1506
6.p	<u>1458</u>
	486
2.p	<u>486</u>

Anmerkung.

Sind die Divisoren sehr groß und ist auch ein großer Quotient zu erwarten, so ist's vortheilhaft sich für den Divisor ein Einmaleins zu entwerfen.

Von den Brüchen.

§. 16.

Erklärungen.

- 1) Wenn die Einheit in gleiche Theile getheilt wird; so heißt einer oder mehrere von diesen Theilen ein *Bruch*.

C

Wenn

Wenn daher nicht alle Theile der Einheit zum Bruch gehören; so ist der Bruch kleiner, als die Einheit selbst (*eigentlicher Bruch*). Alle Theile der Einheit sind der Einheit selbst gleich. Mehrere aber sind gröfser als die Einheit (*uneigentlicher Bruch*). Z. B. Vier Viertel. Sechs Drittel.

- 2) Bei jedem Bruch sind also 2 Zahlen nöthig, eine, um die Menge der Theile anzuzeigen in welche die Einheit getheilt wird (*Nenner*), eine, um die Anzahl der Theile zu zählen, die den Bruch ausmachen sollen (*Zähler*).

Theilt man z. B. die Einheit in 5 Theile; so ist jeder Theil der fünfte vom Ganzen oder ein Fünftel, und der Nenner ist 5. Man könnte nur 3 dieser Theile angegeben wollen, das wären 3 Fünftel und 3 also der Zähler. Dieser Bruch wird so geschrieben $\frac{3}{5}$

Anmerkung.

Man kann Brüche wie ganze Zahlen ansehen, dann ist aber nicht 1 selbst die Einheit, sondern ein Theil von 1. $\frac{5}{5}$ ist eine 3; wovon aber die Einheit $\frac{1}{5}$ ist.

§. 17.

Lehrsatz.

Jeder Bruch ist dem Quotienten gleich, den man erhalten würde, wenn man den Zähler durch den Nenner dividirte.

Beweis.

Nach dem Begriff der Division und nach §. 14 muß der bte Theil irgend eines Dividenden r amal kleiner seyn, als der bte Theil von eines amal größern Dividenden (ar). Das ist $ar : b = (r : b) \cdot a$. Oder setzt man $r = 1$; so ist $a : b = (1 : b) \cdot a$.

Aber $1 : b = \frac{1}{b}$ (§. 16 und §. 7. Erkl. 5. Zuf. 4).

Folglich $(1 : b) a = \frac{1}{b} \cdot a = \frac{a}{b}$ (§. 16) und man hat,

wenn man im ersten Ausdruck $\frac{a}{b}$ für $(1 : b) a$ setzt,

$$a : b = \frac{a}{b}.$$

Anmerkung.

In der Folge werden daher Brüche und Quotienten gegen einander vertauscht werden können.

§. 18.

Wenn eines Bruches Nenner unverändert bleibt, sein Zähler aber einige Male $\left\{ \begin{array}{l} \text{vermehrt} \\ \text{vermindert} \end{array} \right\}$ wird; so wird

der Werth des Bruches eben so viel Mal $\left\{ \begin{array}{l} \text{vermehrt} \\ \text{vermindert} \end{array} \right\}$.

Der Beweis folgt aus §. 16.

Zuf. 1. $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}$ Eine Regel um einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multipliciren. Z.B. $\frac{3}{8} \cdot 2 = \frac{6}{8}$.

Zuf. 2. $\frac{a}{b} : c = \frac{a:c}{b}$ Z. B. $\frac{6}{7} : 2 = \frac{3}{7}$

Zuf. 3. $\frac{1}{n} \cdot a = \frac{a}{n} = a:n$.

§. 19.

Lehrsatz.

Wenn eines Bruches Zähler ungeändert bleibt und es wird sein Nenner einige Mal $\left\{ \begin{array}{l} \text{vermehrt} \\ \text{vermindert} \end{array} \right\}$; so wird der Werth des Bruches eben so viel Mal $\left\{ \begin{array}{l} \text{ver-} \\ \text{mindert} \\ \text{mehrt} \end{array} \right\}$.

Beweis.

I. Es sey $n = pq$ und a werde einmal in n , und dann einmal in p Theile getheilt; so sind n Theile der ersten Eintheilung p Theile der zweiten Theilung gleich. Dieses läßt sich, wenn man, nach den vorigen, das Zeichen der Quotienten, und Brüche vertauscht, so vorstellen.

$n \cdot \frac{a}{n} = p \cdot \frac{a}{p}$. Statt n setze man pq ; so ist

$p \cdot q$.

$p \cdot q \cdot \frac{a}{pq} = p \cdot \frac{a}{p}$. Beide gleiche Sätze mit p dividirt gibt $q \cdot \frac{a}{pq} = \frac{a}{p}$. Dividirt man auf beiden

Seiten mit q ; so erhält man $\frac{a}{pq} = \frac{a}{p} : q$.

II. Der vorlezte Ausdruck ist $q \cdot \frac{a}{pq} = \frac{a}{p}$ weil nun $n = pq$ ist; so ist $p = n : q$. Setzt man nun in den eben erwähnten Ausdruck n für pq und $n : q$ für p ; so erhält man $q \cdot \frac{a}{n} = \frac{a}{n : q}$.

Zuf. 1. $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$ } Regeln für Multiplication und
 Zuf. 2. $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a}{b:c}$ } Division der Brüche mit gan-
 zen Zahlen.

Zuf. 3. $a : \frac{1}{n} = a \cdot n$. Denn $a : \frac{1}{n} = a : (1 : n)$
 $= \frac{a}{1:n} = \frac{a}{1} \cdot n = an$.

§. 20.

Lehrsatz.

Der Werth eines Bruches wird nicht geändert wenn Zähler und Nenner mit einerlei Zahl multiplicirt oder dividirt wird.

Be-

Beweis.

Der Werth des Bruchs $\frac{a}{b}$ werde durch f ausgedrückt; so ist $\frac{am}{b} = fm$ (§. 18. Zuf. 1). Aber $\frac{am}{bm} = \frac{am}{b} : m$ (§. 19. Zuf. 1). Also ist $\frac{am}{bm} = fm : m = f = \frac{a}{b}$. Eben so beweist man auch daß $\frac{a:n}{b:n} = \frac{a}{b}$, wenn man von §. 18 und 19 den 2ten Zusatz anwendet.

§. 21.

Aufgabe.

Brüche von verschiedenen Nennern unter einerlei Benennung zu bringen.

Auflösung.

Man multiplicirt eines jedes Bruches Zähler und Nenner mit einem Product aus den Nennern aller übrigen Brüche.

Beweis.

Durch das Verfahren wird zu allen Nennern ein Product, das durchaus einerlei Factoren hat, nämlich immer die Nenner der ursprünglichen Brüche. Also erhält man gleiche Nenner. Nach §. 20 wird aber dadurch der Brüche Werth nicht geändert.

Bei-

Beispiel.

$$\begin{array}{rclcl} \frac{3}{4} & = & \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 5 \cdot 7} & = & \frac{105}{140} \\ \frac{2}{5} & = & \frac{2 \cdot 4 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 7} & = & \frac{56}{140} \\ \frac{3}{7} & = & \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{7 \cdot 4 \cdot 5} & = & \frac{60}{140} \end{array}$$

§. 22.

Aufgabe.

Brüche zu addiren, oder einen vom andern zu subtrahiren.

Auflösung.

Die Operation wird bloß an den Zählern verrichtet, der Nenner bleibt ungeändert; es wird übrigens vorausgesetzt, daß die Brüche einerlei Nenner haben, oder auf gleiche gebracht sind. Den Satz selbst kann man so bezeichnen $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$.

Beweis.

Man sehe a und c als ganze Zahlen an, deren Einheit $\frac{1}{b}$ ist, (§. 16. Anm.); so hat man den Beweis.

§. 23.

Aufgabe.

Zwei Brüche mit einander zu multipliciren.

Auf-

Auflösung.

Das Product ist ein Bruch, dessen Zähler ein Product der 2 Zähler und dessen Nenner ein Product der 2 Nenner der 2 gegebenen Brüche ist.

Beweis.

$\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ seyen diese beiden Brüche; so ist

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot c \cdot \frac{1}{d}$. Wenn man bei diesem Product die 2 ersten Factoren nach §. 18. Zuf. 1 multiplicirt; so hat man $= \frac{ac}{b} \cdot \frac{1}{d}$. Eine Gröfse aber mit $\frac{1}{d}$ multipliciren heifst sie mit d dividiren (§. 18. Zuf. 3).

Also bekommt man $\frac{ac}{b} : d$, und dieses ist nach §. 19

Zuf. 1. $= \frac{ac}{bd}$. Also ist $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

§. 24.

Einen Bruch, mit einem andern zu dividiren, der aber mit ihm gleichen Nenner hat.

Auflösung.

Man dividirt den Zähler des Dividenden durch den Zähler des Divisors, so erhält man den gesuchten Quotienten.

Beweis.

Dividiren heifst (§. 7. Erk. 4) so lange abziehen, bis kein Abzug mehr möglich ist. Die Anzahl der Abzüge bestimmt den Quotienten. Ein Bruch läfst sich

sich aber vom andern so oft abziehen, als ich seinen Zähler, vom Zähler des andern abziehen kann (§. 22). Dieses aber erfährt man durch Division des einen Zählers durch den andern.

Beispiel.

$$\frac{8}{9} : \frac{4}{9} = 8 : 4 = 2.$$

$$\frac{3}{7} : \frac{4}{7} = 3 : 4 = \frac{3}{4}.$$

Die Anzahl der Abzüge ist bei dem leztern Beispiel ein Bruch, denn die Zahl 3 ist schon erschöpft, wenn man $\frac{3}{4}$ von 4 (d. i. 3) von ihr abgezogen hat.

Die Anzahl der Abzüge ist also $\frac{3}{4}$.

Bezeichnung $\frac{a}{b} : \frac{c}{b} = \frac{a}{c}.$

§. 25.

Einen Bruch durch einen andern zu dividiren, wenn die Nenner verschieden sind.

Auflösung.

Man kehre den Divisor um, d. i. man mache aus seinem Zähler den Nenner und aus seinem Nenner den Zähler, und multiplicire den Dividenden mit diesem Bruche.

Beweis.

Die beiden Brüche seyen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$, oder nach

§. 21 $\frac{ad}{bd}$ und $\frac{cb}{db}$; so ist $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} : \frac{cb}{db} = \frac{ad}{bc}$
(§. 24)

(§. 24) $= \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$. Denn wenn man den vorletzten Ausdruck mit §. 25 vergleicht; so sieht man, daß er sich in die Factoren $\frac{a}{b}$ und $\frac{d}{c}$ zerfallen läßt, es ist also $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$.

§. 26.

Aufgabe.

Ganze Zahlen mit angehängten Brüchen (gemischte Zahlen) können in uneigentliche Brüche verwandelt werden.

Auflösung.

$$a + \frac{c}{b} = \frac{a}{1} + \frac{c}{b} = \frac{ab}{b} + \frac{c}{b} \text{ (§. 21) } = \frac{ab + c}{b}$$

Das heißt, die ganze Zahl (a) wird mit dem Nenner (b) des Bruches multiplicirt, sein Zähler c hinzuaddirt, die Summe giebt den Zähler des uneigentlichen Bruches, unter den man, wie gewöhnlich seinen Nenner (b) setzt.

Beispiel.

$$3 \text{ und } \frac{5}{7} = \frac{21+5}{7} = \frac{26}{7}.$$

§. 27.

Aufgabe.

Einen uneigentlichen Bruch in ganze Zahlen zu verwandeln.

Auf-

Auflösung.

Man dividire den Zähler mit dem Nenner, der Quotient ist die ganze Zahl, wenn bei der Division kein Rest bleibt. Bleibt aber ein Rest, so kommt zur ganzen Zahl noch ein Bruch, dessen Zähler eben dieser Rest und der Nenner der Nenner des gegebenen uneigentlichen Bruches ist.

Beweis.

Der gegebene Bruch sey $\frac{R}{b}$. Da läßt sich nun entweder R als ein vielfaches von b ansehen, oder nicht.

Für den ersten Fall sey $R = mb$; so heisst also der Bruch $\frac{R}{b} = \frac{mb}{b} = m$.

Beispiel.

$$\frac{18}{6} = 3.$$

Für den 2ten Fall, da R kein Vielfaches von b ist, giebt es gewiss eine nächst kleinere Zahl unter R die ein Vielfaches von b ist, die Zahl sey $P = mb$.

Da aber $P = mb$ kleiner ist als R, so sei $mb + q = R$ und der Bruch $\frac{R}{b}$ heisst also $\frac{mb + q}{b} =$

$$(\S. 22) \quad \frac{mb}{b} + \frac{q}{b} = m + \frac{q}{b}.$$

Di-

Dividirt man nämlich R durch b ; so erhält man m zum Quotienten. mb ist aber nur P . Und $R - P = q$. Dieses q kann aber nicht weiter durch b dividirt werden. Es ist ein Divisions-Rest, und so ergiebt sich also, was man sich unter den Divisions-Resten vorzustellen habe. z. B. $\frac{17}{5} = 3 + \frac{2}{5}$.

Rechnung mit entgegengesetzten Gröſſen.

§. 28.

Erklärung.

Entgegengesetzte Gröſſen heißen Gröſſen von einerlei Art, aber von der Beschaffenheit, daß eine die andere vermindert, z. B. Vermögen und Schulden, Steigen und Fallen. Profit, Schaden u. s. w. Die Bezeichnung für die Gröſſen die man für *positiv* annimmt, ist $+$, welches, wenn die Gröſſe zu Anfang eines Ausdruckes steht, auch weggelassen wird. Die *Negative* wird mit $-$ bezeichnet. Gleiche aber entgegengesetzte Gröſſen, heben einander ganz auf und sind $= 0$.

Wer 1000 Gulden Vermögen hat und 1000 Gulden Schulden, hat in der That nichts. $+ a$ und $- a$ ist $= 0$.

Um sich wenigstens zu mancherlei Absichten die Sache anschaulich zu machen, so stelle man sich vor, es habe jemand 3, müsse aber immer eins davon weggeben;

geben; so entsteht für das, was er successive davon noch hat, folgende Scala:

3
2
1
0
—1
—2
—3 u. f. w.

§. 29.

Aufgabe.

Entgegengesetzte Gröfsen zu addiren.

Auflösung.

Entweder sind sie gleich, dann ist ihre Summe $= 0$ (§. 28) oder eine von beiden ist gröfser. Dann ist die Summe der Ueberschüsse der Gröfsern vor der Kleinern mit dem Zeichen der Gröfsern.

Beweis.

Von der Gröfsern wird nur so viel vernichtet, als der Kleinern gleich ist, das übrige bleibt und zwar mit dem Zeichen, das es schon hat. z. B. $+3 + *)$
 $(-5) = -2.$

Näm.

*) Wo die Zeichen $+$ und $-$ in der doppelten Bedeutung vorkommen, bezeichnet das erstere die Operation des Addirens oder Subtrahirens, das aber, welches mit in den Klammern steht, bezeichnet die positive oder negative Beziehung der Gröfse. Dieses wird in der Folge wegfallen.

$$\begin{array}{rcl} \text{Nämlich } + 3 & = & + 3 \\ - 5 & = & - 3 + (-2) \\ \hline \text{Addirt} & = & 0 + (-2) = -2 \end{array}$$

§. 30.

Aufgabe.

Entgegengesetzte Gröſſen von einander zu subtrahiren.

Auflösung.

Man verwandelt das Zeichen der Gröſſe, die man abziehen ſoll, und addirt nun wie gewöhnlich wenn die Zeichen beider Gröſſen dadurch gleichgeworden ſind, oder nach der Vorſchrift des 29 §, wenn dadurch die Zeichen beider Gröſſen ungleich geworden wären.

Beweis.

Wir wollen annehmen es ſei überhaupt $q + r = s$. Man hat im Ganzen auf folgende Fälle Rückſicht zu nehmen:

$$\begin{array}{l} \text{I) Von } + r = s - q \\ \text{iſt abzuziehen } - q = \underline{\quad - q \quad} \\ \phantom{\text{iſt abzuziehen }} \phantom{\underline{\quad - q \quad}} s \end{array}$$

Es bleibt s weil $-q$ von $-q$ aufgeht oder kein Reſt bleibt.

Die Auflöſung verlangt, $-q$ in $+q$ zu verwandeln und zu addiren, da nun q und r einerlei Zeichen haben, ſo geſchieht dies auf die gewöhnliche Weiſe nämlich $r + q$, welches wie vorhin s giebt.

II)

II) Von $-r = -s + q$ (denn $+r = s - q$)
 sei abziehen $+q = +q$

 bleibt $-s$

Nach der Vorschrift der Auflösung verwandelt man $+q$ in $-q$ und addirt $-q$ und $-r$, welche gleiche Zeichen haben. Man erhält also die Summe von q und $r = s$ und zwar negativ weil beide negativ sind.

III) Von $+r = s - q$
 sei abziehen $+s = s$

 bleibt $-q$

Hätte man nach der Vorschrift verfahren; so wäre $+s$ in $-s$ verwandelt worden. Nun hätten $+r$ und $-s$, da die Zeichen ungleich sind, nach §. 29 addirt werden sollen, welches ebenfalls $-q$ gegeben hätte.

IV) Von $-r = -s + q$
 abziehen $-s = -s$

 bleibt $+q$

Dasselbe hätte man gefunden, wenn man $-s$ in $+s$ verwandelt und nach §. 29 $+s$ und $-r$ addirt hätte. Da also die zur Auflösung gegebene Vorschrift in allen 4 Fällen zutrifft, so ist sie auch richtig.

Anmerkung.

Es hätten noch 2 Fälle erwähnt werden könnên,
von $+ s$ abzuziehen $+ r$, wo $+ q$ bleibt,
... $- s$. . . $- r$. . . $- q$. . .

Dieses kann aber für den Anfänger selbst keinen
Anstoß geben, da es nach den gewöhnlichen Regeln
des Subtrahirens abzumachen ist.

Zusatz.

$$\begin{array}{l} a - (+b - c) = a - b + c \\ \text{Denn } a \quad \text{ist} = a + 0 \\ \text{Davon ist abzuziehen } b - c \\ \text{Bleibt } a - b + c \end{array}$$

§. 31.

Wenn man entgegengesetzte Gröſſen zu multipli-
ciren hat; ſo geben gleiche Zeichen der Factoren ein
positives Product, ungleiche ein negatives.

Beweis.

I) $+ a$ mit $+ b$ multipliciren heißt $+ a$ ſo oft
nehmen als die Einheit in b ſteht, man bekommt alſo
 $+ ab$.

II) $- a$ mit $- b$ multipliciren heißt, ein Pro-
duct finden, in welchem $- a$ ſo oft vorkommt, als die
Einheit in $- b$. In $- b$ ſteckt aber die Einheit nicht
ſelbſt, ſondern ihr Gegenteil ſteckt b mal in $- b$.
Man muß daher das Gegenteil von $- a$ d. i. $+ a$
bmal

bmal nehmen, um das verlangte Product darzustellen, welches $+$ ab seyn muß.

III) $-a$ mit $+$ b multipliciren, heißt $-a$ b fach nehmen, das giebt offenbar $-ab$.

IV) $+$ a mit $-b$ multipliciren heißt, weil das Gegenteil der Einheit b mal in $-b$ enthalten, das Gegenteil von a , d. i. $-a$ b fach nehmen, wieder $-ab$.

Beispiele.

$$-3 \cdot -6 = 18. \quad -3 \cdot +6 = -18 \text{ etc.}$$

Anmerkung.

Die Fälle der Multiplication sich zu versinnlichen, ist es gut, sich durch successive Veränderung des einen Factor die Entstehung der verschiedenen Fälle zu vergegenwärtigen. Einleuchtend ist, daß, wenn $m \cdot n = p$ ist, $m \cdot (n+1) = p + m$ seyn werde (§. 13 Zus. 2). Denkt man sich $(n+1) = q$ und $p + m = r$; so ist $m \cdot q = r$ und $m \cdot n$ oder $m \cdot (q-1) = r-m$. Das heißt mit Worten, wenn man einen Factor m ungeändert läßt, den andern aber um 1 vermehrt oder vermindert; so wird auch dadurch das Product um so viel vermehrt oder vermindert, als der zuerst genannte Factor m beträgt. Weil also $3 \cdot 5 = 15$; so ist $2 \cdot 5 = 15 - 5 = 10$; $1 \cdot 5 = 10 - 5 = 5$; $0 \cdot 5 = 5 - 5 = 0$; (§. 28) $-1 \cdot 5 = 0 - 5 = -5$; $-2 \cdot 5 = -5 - 5 = -10$. Daraus sieht man,

D

wie

wie durch Abnahme das positive in Negatives übergeht, und daß ungleiche Zeichen ein negatives Product geben.

Da nun $-2.5 = -10$; so ist $-2.4 = -(10-2) = -8$; $-2.3 = -(8-2) = -6$; $-2.2 = -(6-2) = -4$; $-2.1 = -(4-2) = -2$; $-2.0 = -(2-2) = -0$; $-2.-1 = (0-2)$ das ist das Gegentheil von $0-2$ oder $-0+2 = +2$; $-2.-2 = -(0-2-2)$ d. i. das Gegentheil von $0-2-2$ oder $-0+2+2 = +4$.

Hier sieht man, wie nach und nach das Negative sich vermindert. Diese Verminderung kann man sich durch Hinzukommen des Positiven gedenken, das endlich so stark wird, daß es das Negative völlig überwiegt, d. i. das Product wird positiv.

§. 32.

Beim Dividiren gilt in Absicht des Quotienten dasselbige, auch kann der Beweis auf die nämliche Art geführt und erläutert werden.

Beispiel.

$$\frac{-3}{+6} = -\frac{3}{6}; = \frac{-1}{2} = \frac{1}{2}.$$

§. 33.

Wenn von Gröſſen einige abgezogen und einige dazu addirt werden; so ist der ganze Ausdruck eine Zu-

Zusammensetzung aus positiven und negativen Gröſſen. Die Gröſſen nämlich die abgezogen werden ſollen, können als negative angeſehen werden, z. B. $8 - 3 + 2 = 7$. Hier ſoll 3 von 8 abgezogen und zum Reſt 2 addirt werden. Das kann auch vorgeſtellt werden: zur 8 wird die negative 3 (§. 29) und die poſitive 2. addirt, oder man hat $8 + (-3) + 2$.

Sollen nun ſo zuſammengeſetzte Gröſſen mit einander multiplicirt werden; ſo ergiebt ſich aus §. 13 Zuſ. 3 und §. 31 die ganze Operation. Z. B. $a - b + c$ iſt zu multipliciren mit $c - d$. Man verrichtet dieſes, indem man alle Theile des einen Factors mit allen Theilen des andern Factors einzeln multiplicirt, und die Partial-Producte addirt.

1. *Beispiel.*

$$\begin{array}{rcl} a - b + c & = & a + (-b) + c \\ c - d & = & c + (-d) \\ \hline ac + (-bc) + cc + (-ad) + bd + (-cd) & = & \\ ac - bc + cc - ad + bd - cd. & & \end{array}$$

Oder kürzer und mit Weglaſſung der Klammern

$$\begin{array}{rcl} a - b + c & & \\ & c - d & \\ \hline ac - bc + cc - ad + bd - cd & & \end{array}$$

2. Beispiel.

$$\begin{array}{r}
 8 - 5 + 2 \text{ wird multiplicirt} \\
 \text{mit} \quad 7 - 5 \\
 \hline
 - 40 + 25 - 10 \\
 56 - 35 + 14 \\
 \hline
 56 - 75 + 39 - 10 = 10.
 \end{array}$$

Die vollständige Berechnung würde gewesen seyn:

$$\begin{array}{r}
 8 + (-5) + (+2) \\
 7 + (-5) \\
 \hline
 + (-40) + (+25) + (-10) \\
 56 + (-35) + (+14) \\
 \hline
 \end{array}$$

56 + (-75) + (+39) + (-10), welches dem Vorigen gleich ist. Die Abkürzung der vorigen Berechnung, die in der Folge immer gebraucht wird, gründet sich darauf, daß die Addition einer positiven GröÙe eine wirkliche Addition, die Addition einer negativen aber z. B. + (-75) eine Subtraction ist.

§. 33.

Zusammengesetzte GröÙen zu dividiren, lehrt §. 15 in Verbindung mit dem 31sten. Im 15ten § sind die Theile des Dividenden nach ihrer Ordnung abzutheilen, hier sind die Theile nur willkührlicher zusammengesetzt. Es sind aber insbesondere 2 Fälle zu betrachten, denn der Divisor ist entweder einfach, oder zusammengesetzt.

Im

Im ersten sucht man den Partial-Quotienten für jeden einzelnen Theil des Dividenden ganz wie in §. 15.

Beispiel.

$$\begin{aligned} & pq - pr + 8p - 5 + pt \text{ soll durch } p \text{ dividirt wer-} \\ & \text{den: das giebt } \frac{pq}{p} - \frac{pr}{p} + \frac{8p}{p} - \frac{5}{p} + \frac{pt}{p} \text{ (§. 17).} \\ & = q - r + 8 - \frac{5}{p} + t. \text{ (§. 7. Erkl. 4. Zuf. 3.)} \end{aligned}$$

Im 2ten Fall sucht man immer einen Theil des Quotienten zu bestimmen, multiplicirt diesen mit dem Divisor, zieht das Product mit Rücksicht auf §. 30 von dem Dividenden ab.

Der Rest wird immer mit den noch übrigen Theilen des Dividenden zusammen genommen und so lange mit der Operation fortgefahren bis man keinen Theil des Quotienten mehr findet. Im ganzen wird beynahe eben so verfahren, wie im §. 15. Zufaz gelehrt wird.

Beispiel.

$aa - bb - ac + bc$ soll mit $a - b$ dividirt werden.

$$\begin{array}{r|l} a - b & aa - bb - ac + bc \\ a. (a-b) = & aa - ab \\ \hline \text{Rest} = & + ab - bb - ac + bc \\ b. (a-b) = & + ab - bb \\ \hline \text{Rest} = & - ac + bc \\ - c. (a-b) = & - ac + bc \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} a + b - e \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

Hier

Hier traf sichs dafs — ab beim ersten Abzug mit abgezogen werden sollte. Da aber dieses im Dividenten nicht vorhanden ist; so denke man sich, dafs es von 0 abzuziehen sey, da ist der Rest nach §. 30 $0 \div ab = \div ab$.

Von den Decimalbrüchen.

§. 34.

Erklärung.

Beim Zahlensystem trifft man, wenn man von der linken zur rechten Hand fortgeht, immer auf Ordnungen, in denen Ziffern immer zehnmal weniger bedeuten bis man auf die Ordnung der Einer herabkommt. Es läßt sich aber denken, dafs man rechts von der Ordnung der Einer noch eine Ordnung hätte, wo Ziffern zehnmal weniger bedeuteten, als wenn sie in der Einer-Ordnung selbst stünden. d. i. 1 in dieser Ordnung wäre $= \frac{1}{10}$; 2 $= \frac{2}{10}$; 3 $= \frac{3}{10}$ u. f. w. Neben dieser Ordnung könnte man sich noch eine denken, wo die Werthe der Ziffern wieder ums Zehnfache fielen. 1 wäre da der zehnte Theil von $\frac{1}{10} = \frac{1}{10} : 10 = \frac{1}{100}$; 2 $= \frac{2}{100}$ u. f. w. So könnte man auf Ordnungen kommen, wo die Ziffer 1 $= \frac{1}{1000}$; $\frac{1}{10000}$; $\frac{1}{1000...0}$ wäre.

Weil

Weil die Ordnung der Einer die 0te heisst (§. 8); so kann die Scala im §. 28 Veranlassung geben, die Ordnung nach den Einern mit dem Ordnungsexponenten -1 zu bezeichnen.

$$\text{Es ist also } \overset{-1}{1} = \frac{1}{10}; \overset{-1}{2} = \frac{2}{10}; \overset{-1}{3} = \frac{3}{10} \text{ u. f. w.}$$

So begreift man, was die Ordnungsexponenten -2 ,

-3 u. f. w. bedeuten sollen; es ist nämlich $\overset{-2}{1} = \frac{1}{100}$;

$$\overset{-3}{2} = \frac{2}{1000} \text{ u. f. w.}$$

Um sich dieser willkührlichen Anordnung mit Bequemlichkeit bedienen zu können, setzt man hinter die Ziffer von der 0ten Ordnung ein Comma (,) welches das *Einheits-Comma* genannt wird und anzeigt, dass die folgenden Ziffern von der Ordnung

-1 ; -2 ; -3 u. f. w. seyen. Z. B. $83,598 = 83$

$$+ \overset{-1}{5} + \overset{-2}{9} + \overset{-3}{8} = 83 + \frac{5}{10} + \frac{9}{100} + \frac{8}{1000} = \frac{83598}{1000}$$

$$\text{Eben so } 17,5374 = \overset{0}{17} + \overset{-1}{5} + \overset{-2}{3} + \overset{-3}{7} + \overset{-4}{4} = 17 + \frac{5}{10} + \frac{3}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{4}{10000} = \frac{175374}{10000} = 17,5374.$$

Auch hier werden die leeren Stellen mit 0 ausgefüllt, z. B. $0,035 = \overset{-2}{3} + \overset{-3}{5} = \frac{3}{100} + \frac{5}{1000} = \frac{35}{1000} = \overset{-3}{35}$.

Diese

Diese hier vorkommenden Theile der Zahl, die kleiner sind, als die Einheit, heißen *Decimalbrüche*.

§. 35.

Aufgabe.

Um Decimalbrüche zu addiren und zu subtrahiren, verfähre man gerade, wie es §. 9 und 10 gemäß ist.

Beispiele.

$$\begin{array}{r}
 83,7859 \\
 1,34.. \\
 17,482. \\
 \hline
 \text{Summe} = 111,6079
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 7,0853 \\
 0,947 \\
 \hline
 \text{Rest} = 6,1383
 \end{array}$$

§. 36.

Aufgabe.

Multiplication der Decimalbrüche.

Lehrsatz.

$$\text{Wenn } p \cdot q = r; \text{ so ist } p \cdot q = \frac{p \cdot q}{10^{n+m}} = \frac{r}{10^{n+m}}$$

Beweis.

Wenn ein Factor um seinen zehnten, hundertsten u. s. w. Theil vermindert wird; so trifft dieselbe Verminderung auch das Product. Ist also $p \cdot q = r$; so ist

$$\frac{p}{10}$$

$$\frac{p}{10} \cdot q^0 = \frac{r}{10} \text{ oder } p^{-1} \cdot q^0 = r; p^{-1} \cdot q^{-2} = r \text{ und}$$

$$p^{-n} \cdot q^0 = r. \text{ Da nun } p^{-n} \cdot q^0 = r; \text{ so ist eben so}$$

$$p^{-n} \cdot \frac{q}{10} = \frac{r}{10} \text{ Um von } r \text{ den } 10\text{ten Theil zu neh-}$$

men, darf man es nur aus der Ordnung $-n$ noch um eine weiter nach rechts setzen das ist, (§. 34) in

die $-(n+1)^{\text{te}}$ Ordnung. Es ist folglich $p^{-n-1} \cdot q^{-(n+1)} = r$;

$$p^{-n-2} \cdot q^{-(n+2)} = r \text{ und } p^{-n-m} \cdot q^{-(m+n)} = r .$$

Dadurch sieht man, wie man beim Multipliciren der Decimal-Brüche zu verfahren hätte. Man sucht das Product r ohne Rücksicht auf die Ordnungen, bestimmt aber diese aus den Ordnungen der Factoren.

Z. B. 18,34 soll mit 0,0343 multiplicirt werden.

$$\begin{array}{r} 1834 \\ 343 \\ \hline 5502 \\ 7536 \\ 5502 \\ \hline 629062 \end{array}$$

Weil nun $1834 \cdot 343 = 629062$; so ist $1834^{-2} \cdot 343^{-4}$

$$= 629062^{-(2+4)} = 629062^{-6} = 0,629062.$$

§. 37.

Aufgabe.

Division der Decimalbrüche.

Lehrsatz.

Wenn $\overset{\circ}{p} : \overset{\circ}{q} = r$; so ist $\overset{-n}{p} : \overset{-m}{q} = \overset{-(n-m)}{r}$.

Beweis.

Durch eine zehnfache, hundertfache u. f. w. Verminderung des Dividenden, wird der Quotient auch um ein zehnfaches, hundertfaches u. f. w. vermindert, aber durch eine solche Verminderung des Divisors wird der Quotient in dem Grade vermehrt. Dieses erhellt aus den 2ten Zusätzen der §§. 18 und 19, da nach §. 17 Quotienten wie Brüche sind.

Weil also $\overset{\circ}{p} : \overset{\circ}{q} = r$; so ist $\frac{\overset{\circ}{p}}{10} : \overset{\circ}{q} = \frac{r}{10} = \overset{-1}{r}$

und $\overset{-n}{p} : \overset{\circ}{q} = r$. Ferner folgt aus eben diesem, daß

$\overset{-n-1}{p} : \overset{-n}{q} = r$. Um aber r zu verzehnfachen, darf es man nur aus der $\overset{-n}{n^{\text{ten}}}$ Ordnung um eine weiter

links das ist in die $\overset{-(n-1)}{n^{\text{te}}}$ Ordnung setzen. Also

$\overset{-n-1}{p} : \overset{-(n-1)}{q} = r$; $\overset{-n-2}{p} : \overset{-(n-2)}{q} = r$ und $\overset{-n-m}{p} : \overset{-(n-m)}{q} = r$.

Die Anwendung dieses Satzes auf die Division der Decimalbrüche ist die, daß man sie als ganze Zahlen

Zahlen dividirt und dem Quotienten einen negativen Ordnungsexponenten giebt, der dem Rest gleich ist, wenn man den Ordnungsexponenten des Divisors vom Ordnungsexponenten des Dividenden abzieht.

Beispiel.

1,0125 soll 3,75 dividirt werden.

Da $10125 : 375 = 27$ ist; so ist $10125 : 375 = 27$
 $= 0,27$.

Der Fall, daß sich der Ordnungsexponent des Divisors von dem des Dividenden nicht abziehen läßt, wird nach §. 30 beseitigt, wenn die Division ohne Rest aufgeht; oder dadurch, daß man durch angehängte Nullen die Anzahl der negativen Ordnungen im Dividenden ohne Veränderung seines Werthes vermehrt. Dieses geschieht, wenn die Division nicht ohne Rest vor sich geht und man kann der Nullen so viele anhängen, als man will.

Beispiele.

50,4 soll durch 0,36 dividirt werden.

Da $504 : 36 = 14$; so ist $504 : 36 = 14$. Aber
 $1 - 2 = -1$. Das Gegentheil davon ist aber $+1$.
 Also ist $-(1-2) = +1$. Daher ist $50,4 : 0,36$
 $= 14 = 140$.

5,35 soll durch 0,075 dividirt werden.

Hier ist $5,35 = 5,35000 \dots 0$.

Man

Man dividirt daher 535000....0 mit 75 und setzt die Nullen die man gebraucht während der Operation hinzu.

$$\begin{array}{r}
 75 \overline{) 535000} \quad | \quad 7133 \\
 \underline{525 \dots} \\
 100 \dots \\
 \underline{75 \dots} \\
 250 \dots \\
 \underline{225 \dots} \\
 250 \dots \\
 \underline{225 \dots} \\
 25 \dots
 \end{array}$$

Da nun $535000 : 75 = 7133$; so ist $5,35000 : 0,075 = 71,33$.

Die Division liefs aber noch einen Rest übrig: mit noch einem Null hätte man den Quotienten 71,333 und mit mehrern überhaupt 71,3333 gefunden.

§. 38.

Aufgabe.

Gemeine Brüche in Decimalbrüche zu verwandeln.

Auflösung.

Man hänge an den Zähler des Bruches so viele Nullen als nöthig ist, um ihn mit dem Nenner dividiren

ren zu können. Geht aber diese Division nie ohne Rest von Statten, so hänge man überhaupt so viele Nullen hinan, als man will, ihre Anzahl bestimmt den negativen Exponenten des Quotienten der als Decimalbruch dem gemeinen Bruche gleich ist.

Beweis.

Der gemeine Bruch sei $\frac{a}{b}$ und $100 \dots \mu$ bedeute eine Anzahl von m Nullen.

Es ist $\frac{a}{b} = a : b$. Nun ist zwar b in a kein ganzes Mal enthalten; es kann aber etliche Male in $100 \dots \mu$ enthalten seyn. Der Quotient $100 \dots \mu : b$ sey $= q$. So ist $100 \dots \mu : b = q$ (§. 37.)

$$\text{Es ist aber } 100 \dots \mu = \frac{a \cdot 100 \dots \mu}{100 \dots \mu} = a;$$

$$\text{also ist auch } a : b \text{ oder } \frac{a}{b} = q.$$

Beispiel.

Der Bruch $\frac{3}{4}$ soll in einen Decimalbruch verwandelt werden. $300 : 4 = 75$; also $= 0,75$.

Oefters

Oefters geht diese Division nie ohne Rest auf

$$\text{z. B. } \frac{100}{12} = 8 + \overset{\text{II}}{x}; \quad \frac{1000}{12} = 83 + \overset{\text{II}}{x}; \quad \frac{10000}{12} \\ = 853 + \overset{\text{III}}{x} \text{ und } \frac{10 \dots \dots 0}{12} = 853333 \dots \dots + \overset{\text{II}}{x},$$

wo $\overset{\text{II}}{x}$, $\overset{\text{III}}{x}$, $\overset{\text{II}}{x}$ den noch immer fehlenden Bruch bedeutet, da ist also $\frac{1}{12}$, je nachdem man viel oder weniger Nullen anhängt = 0,8 oder 0,83. oder 0,833 oder überhaupt 0,83333.... so genau als man will.

Anmerkung.

Bei der Rechnung mit Decimal-Brüchen kann man noch mancherlei Vortheile anwenden, deren Erklärung hier zu weitläufig wäre. Nur das einzige noch! Es giebt Brüche, die sich nie vollkommen als Decimalbrüche darstellen lassen, wie z. B.

$$\frac{2}{7} = 0,285714285 \dots$$

Dass man sich aber dem Werthe derselben so weit nähern könne, als man will, fällt ebenfalls in die Augen.

Will man mit Hintanfezzung einiger Genauigkeit nur einige Decimalstellen beibehalten, so vermehre man die letzte beibehaltene Ziffer um 1, wenn die erste der weggeworfenen gröfser ist als 5.

Wollte

Wollte man daher $\frac{2}{7}$ nur in Zehntheilen haben, so wäre es $\approx 0,3$; In Hunderttheilen $\approx 0,28$, ferner $\approx 0,286$; $0,2857$; $0,2857143$ u. f. w.

Von den Potenzen und Wurzeln.

§. 39.

Erklärungen.

Eine Potenz heist ein Product aus mehrern gleichen Factoren, und zwar die 1te, 2te nte Potenz nach der Anzahl dieser Factoren. Die 3te Potenz von a ist also $\approx aaa$, welches geschrieben wird a^3 . Die vierte Potenz von 3 ist $3.3.3.3 \approx 3^4 \approx 81$. Allgemein ist $a^n \approx a.a.....a$.

Die Zahl oben rechts, welche die Anzahl der Factoren anzeigt, heist der Exponent der Potenz.

Ein einziger dieser Factoren heist die Wurzel aus dieser Potenz, die man auch Wurzeln des 2ten, 3ten nten Grades nennt. So ist a die Wurzel des 3ten Grades aus a^3 , weil $a.a.a \approx a^3$. 3 ist die Wurzel des 4ten Grades aus 81, weil $3.3.3.3 \approx 3^4 \approx 81$. Ueberhaupt ist a die Wurzel des nten Grades aus a^n .

Die Wurzel bezeichnet man auch gewöhnlich nur vorzüglich wenn ihre absolute Gröfse nicht so
gleich

gleich in die Augen fällt. Denkt man sich nämlich a als ein Product aus n gleichen Factoren; so ist einer dieser Factoren die Wurzel des n ten Grades aus a und wird unter der Bezeichnung $\sqrt[n]{a}$ vorgestellt. $\sqrt[3]{a}$ ist die Wurzel des 3ten Grades aus a , d. i. $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} = a$. Es ist daher $\sqrt[4]{81} = 3$.

Die Zahl über dem Wurzelzeichen $\sqrt{}$ heisst der Wurzelexponent und wird beim zweiten Grade gewöhnlich weggelassen.

§. 40.

A u f g a b e.

Potenzen von einerlei Wurzel mit einander zu multipliciren.

A u f l ö s u n g.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

B e w e i s.

a^m hat m Factoren, alle $= a$; a^n hat deren n . Nach der Multiplication hat man also $m+n$ Factoren, d. i. das Product ist $= a^{m+n}$.

B e i s p i e l.

$$a^3 \cdot a^2 = a^5.$$

Zu-

Zus. 1. Wenn man das Verfahren auf Brüche anwenden wollte; so wäre $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = a^1 = a$; ferner $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a$ u. s. w. Untersucht man dieses nach dem oben aufgestellten Begriffe der Potenz; so hiesse $a^{\frac{1}{2}}$ ein Product, wo a nur $\frac{1}{2}$ mal als Factor vorkommt. Was dieses auch für einen Sinn haben mag; so ist doch klar, daß wenn man dieses Product 2 mal wieder als Factoren setzt, man ein Product erhält, worinnen a $2 \cdot \frac{1}{2}$ mal d. i. einmal als Factor vorkommt, d. i. $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a$. In $a^{\frac{1}{3}}$ sind nur $\frac{1}{3}$ Factor, diese 3fach neben einander geben 1 Factor, daher $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a$. Allgemein ist $a^{\frac{1}{n}}$ ein Product aus $\frac{1}{n}$ Factoren jeder $= a$. Was dies auch immer heißen mag; so ist doch klar, daß wenn man dieses Product n fach als Factor neben einander setzt, dieses neue Product $\frac{1}{n} \cdot n$ Factoren enthält, jeder $= a$. Daher ist $a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} \dots a^{\frac{1}{n}}$ oder $(a^{\frac{1}{n}})^n = a$.

E

Dieses

Dieses zeigt 1) daß man sich schon nach dem Begriff der Potenz gebrochene Exponenten vorstellen könne, 2) daß beim multipliciren mit gebrochenen Exponenten eben so zu verfahren sey, wie mit den ganzen.

Zuf. 2. $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$. Denn $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$ und $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}}$ ebenfalls $= a$. Allgemein ist $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Zuf. 3. $(a^m)^2 = a^{2m}$. Denn $(a^m)^2 = a^m \cdot a^m = a^{m+m} = a^{2m}$. Ferner $(a^m)^3 = a^{3m}$. Denn $(a^m)^3 = a^m \cdot a^m \cdot a^m = a^{m+m+m} = a^{3m}$. Allgemein $(a^m)^n = a^{nm}$.

Beispiel.

$$(a^5)^2 = a^{10}.$$

Zuf. 4. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$. Denn $\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}}$ (Zuf. 2). Dieses ist nach Zuf. 3 $= a^{\frac{1}{n} \cdot m} = a^{\frac{m}{n}}$.

Beispiel.

$$\text{I) } \sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}. \quad \text{II) } \sqrt{a^6} = a^{\frac{6}{2}} = a^3.$$

§. 41.

§. 41.

Aufgabe.

Potenzen von einerlei Wurzel durcheinander zu dividiren.

Auflösung.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Der Beweis leuchtet durch ein paar Beispiele ein

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{aaaaa}{aaa} = aa = a^2 = a^{5-3}.$$

$$\frac{a^4}{a^3} = \frac{aaaa}{aaa} = a = a^1 = a^{4-3}.$$

Zuf. 1. $\frac{a^n}{a^n}$ ist nach obiger Auflösung $= a^{n-n}$

$= a^0$. Nun ist es aber auch nach den Begriffen der Division $= 1$. Daher $a^0 = 1$.

Zuf. 2. Wenn $m-n = r$, oder $n-m = -r$;

so ist ebenfalls nach obiger Auflösung $\frac{a^n}{a^m} = a^{-r}$.

Nach den gemeinen Gesetzen der Division (§. 7

Erklär. 4, Zuf. 3) ist aber $\frac{a^n}{a^m} = a^{\frac{r}{-1}}$. Also ist a^{-r}

$= a^{\frac{1}{r}}$. Wenn z. B. $n = 3$ und $m = 5$ also $r = 2$ ist; so ist nach gegenwärtigen §. $\frac{a^3}{a^5} = a^{-2}$.

Es ist aber auch $= \frac{a a a}{a a a a a} = \frac{1 \cdot a a a}{a a a a a} = \frac{1}{a^2}$.

Daher $a^{-2} = a^{\frac{1}{2}}$. Eben so ist $a^{-1} = a^{\frac{1}{1}} = \frac{1}{a}$.

Zuf. 3. Betrachtet man den Ausdruck a^{-r} nach den Begriff des 39. §; so würde er andeuten, daß a nicht als Factor, sondern als Gegentheil von Factor, d. i. als Divisor in a^{-r} vorhanden sey.

Der Ausdruck a^0 wäre so zu verstehen, daß a weder als Factor noch als Divisor vorkomme. Es ist also etwas, wobei keine Theilung und keine Vermehrung statt findet, und dieses führt auf die Vorstellung von 1. Daß man überhaupt beim Uebergang vom Factor zum Divisor auf 1 kommt, kann man leicht sehen, wenn man statt a^n das ihm gleiche $\frac{1 \cdot a^n}{1}$ setzt, successive die Anzahl der Factoren vermindert bis kein a mehr da ist, und sie dann ins Gegentheil übergehen läßt nach folgendem Schema

a^n	$\dots$	a^2	a^1	a^0	a^{-1}	a^{-2}	$\dots$	a^{-n}
$\frac{1 \cdot a^n}{1}$	$\dots$	$\frac{1 \cdot aa}{1}$	$\frac{1 \cdot a}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1 \cdot a}$	$\frac{1}{1 \cdot aa}$	$\dots$	$\frac{1}{1 \cdot a^n}$

§. 42.

Aufgabe.

$$(a b \dots h)^n = a^n \cdot b^n \dots h^n.$$

Der Beweis wird durch ein Beispiel einleuchtend.

$(a \cdot b \cdot c)^3 = abcabcabc = aaa bbb ccc = a^3 b^3 c^3$.
So oft nämlich das ganze Product als Factor in der Potenz vorkommen soll; so oft müssen auch dessen einzelne Factoren darinnen vorkommen.

Da also $a \cdot b \dots h$ n mal als Factor in $(a \cdot b \dots h)^n$ vorkommen soll; so muß auch a , $b \dots$ und h jeder einzeln n mal als Factor darinnen vorkommen, d. i.
 $(a \cdot b \dots h)^n = a^n \cdot b^n \dots h^n$.

$$\text{Zuf. 1. } \sqrt[n]{(a \cdot b \dots h)} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \dots \sqrt[n]{h}.$$

$$\text{Denn } \sqrt[n]{(a \cdot b \dots h)} \text{ ist } = (a \cdot b \dots h)^{\frac{1}{n}} \text{ (§. 40)}$$

$$\text{Zuf. 2). Dieses ist aber nach §. 42 } = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} \dots$$

$$h^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \dots \sqrt[n]{h}.$$

Zuf.

$$\begin{aligned} \text{Zuf. 2. } \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n}. \text{ Denn } \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = \\ (\S. 41 \text{ Zuf. 2}) &= a \cdot b^{-1}. \text{ Folglich ist } \left(\frac{a}{b}\right)^n \\ &= (a \cdot b^{-1})^n = (\S. 42 \text{ u. } \S. 40 \text{ Zuf. 3}) a^n \cdot b^{-n} \\ &= a^n \cdot \frac{1}{b^n} = \frac{a^n}{b^n}. \end{aligned}$$

$$\text{Zuf. 3. Auch } \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \text{ wie man leicht}$$

sieht, wenn man $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$ statt $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ schreibt.

Von Quadrat- und Cubikzahlen, und ihren Wurzeln.

§. 43.

Die zweite Potenz wird gewöhnlich das Quadrat oder die Quadratzahl, die 3te der Cubus (Würfel) oder Cubikzahl genannt; so ist 81 die Quadratzahl von 9, und 8 die Cubikzahl von 2. Die Ursache dieser Benennung wird in der Geometrie gesagt. Der häufige Gebrauch dieser Potenzen veranlaßt eine nähere Betrachtung derselben.

Nach

Nach den Regeln der Multiplication ist $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Stellt man sich nun unter a einen Zehner und unter b einen Einer vor, und setzt man $a = e^1$ und $b = f^0$ so dafs e und f blofse Ziffern bedeuten, die erst durch die Ordnungszahlen ihren bestimmten Werth erhalten; so ist

$$a^2 + 2ab + b^2 = e^2 + 2ef + f^2.$$

Hier kann jeder einzelne Theil mehr Ziffern enthalten, z. B. für $e = 8$ ist $e^2 = 64$; die Ordnungszahl geht aber natürlich die letzte Ziffer an.

So lehrt also der Ausdruck, dafs $\left(e^1 + f^0 \right)^2$ oder das Quadrat der Wurzeln von 10 bis 99 aus etlichen Hunderten, etlichen Zehnern und Einheiten bestehe, und dafs die Hunderte das Quadrat des ersten Theils, die Zehner das doppelte Product beider Theile und die Einer das Quadrat des 2ten Theiles enthalten. Ferner besteht ein solches Quadrat wenigstens aus 3 höchstens 4 Ziffern: Denn e^2 hat noch 2 Ziffern hinter sich, weil es von der 2ten Ordnung ist, kann aber selbst entweder aus einer oder 2 Ziffern bestehen.

Ferner ist klar dafs $2ef^1$ ein- zwei- und dreiziffrig seyn könne. Es können sich daher Ziffern davon in die 2te und 3te Ordnung erstrecken. In einem 4ziffrigen

rigen Quadrat müssen daher nicht alle vorhandene Hunderte zum Quadrat des Zehners gehören, sondern etliche können zum doppelten Product des ersten und zweiten Theiles gezogen werden müssen. Dasselbe gilt auch von $\overset{0}{f}^2$.

Beispiel.

Es sey $a = 30$ oder $e = 3$
und $b = 8$ $f = 8$

so ist $\overset{1}{e} + \overset{0}{f} = 38$

$$\overset{2}{e}^2 = 900$$

$$2 \overset{2}{e} \overset{1}{f} = 480$$

$$\overset{0}{f}^2 = 64$$

$$\overset{2}{e}^2 + 2 \overset{1}{e} \overset{0}{f} + \overset{0}{f}^2 = 1444 = 38^2 = 38 \cdot 38.$$

§. 44.

Aufgabe.

Die Quadratwurzel $\left(\overset{1}{e} + \overset{0}{f} \right)$ zu finden, die einer 3 oder 4ziffrigen Quadratzahl $\left(\overset{2}{e}^2 + 2 \overset{1}{e} \overset{0}{f} + \overset{0}{f}^2 \right)$ zugehört.

Auflösung.

1) Die Wurzel besteht aus Zehnern und Einern (§. 43); Die den Hunderten des Quadrats zugehörige
Wurzel

Wurzel ist der erste Theil der gesuchten Wurzel
oder e .

2) Wenn man e^2 von der ganzen Quadratzahl
abzieht; so bleibt $2ef + f^2$ übrig. In der ganzen An-
zahl von Zehnern steckt also das doppelte Product.
Dieses mit $2e$ dividirt giebt zum Quotienten f oder
den zweiten Theil der Wurzel.

3) Bei dieser Division ist darauf zu sehen, dafs,
wenn etwa f^2 2 Ziffern haben sollte, nach Abzug von
 $2ef$ noch das vollständige f^2 übrig bleibe.

Der Beweis liegt in der Auflösung selbst und im
vorigen §.

1. Beispiel.

Man verlangt die Quadratwurzel aus 1444.

$e^2 + 2ef + f^2 =$	1444	$\begin{matrix} 1 \\ e \end{matrix}$	
e^2	900	$\begin{matrix} e \\ f \end{matrix}$	
$2ef + f^2 =$	544		$30 + 8 = 38$
$2e =$	(als Divisor) (60)		
$2ef =$	480		
$f^2 =$	64		
$f^2 =$	64		
	0		

Die

Die Hunderte sind $\overset{2}{=} 14$. Weil $4 \cdot 4 = 16$; so ist 3 die größtmögliche Wurzel oder $\overset{1}{=} e$ und $30 = \overset{1}{e}$, und $900 = \overset{2}{e^2}$. Wird nun 900 von 1444 abgezogen; so bleibt 544.

Die Zehner sind 540. Werden diese durch $2e \overset{1}{=} 60$ dividirt; so wäre der Quotient zwar 9; dann aber wäre $\overset{0}{f^2} = 81$, und so viel wäre in der Quadrat- zahl nach Abzug von $2ef \overset{1}{}$ nicht mehr vorhanden. Nimmt man daher auf Nr. 3. der Auflösung Rücksicht; so findet man, daß $f = 8$ ist.

2. Beispiel.

$e^2 + 2ef + f^2 = 6084$	ef
$e^2 \qquad \qquad \qquad = 49$	78
$2ef + f^2 = 1184$	
$2e \qquad \qquad \qquad 14$	
$2ef \qquad \qquad \qquad 112$	
$f^2 \qquad \qquad \qquad = 64$	
$f^2 \qquad \qquad \qquad = 64$	
0	

§. 45.

Aufgabe.

Die Zusammensezzung der Quadrate von 3, 4 und vieltheiligen Wurzeln läset sich auf folgende Art entwickeln.

Es

$$\begin{aligned} \text{Es sey } a + b &= s; \text{ so ist } (a + b + c)^2 = (s + c)^2 \\ &= (\S. 43) \ s^2 + 2sc + c^2 = (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2 = (a + b + c)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ist } a + b + c &= s; \text{ so ist } (a + b + c + d)^2 = (s + d)^2 = s^2 \\ &+ 2sd + d^2 = (a + b + c)^2 + 2(a + b + c)d + d^2 = \\ &a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2 + 2(a + b + c)d + d^2. \end{aligned}$$

Daraus erhellt folgendes:

Zum Quadrat einer eintheiligen Wurzel wird noch das doppelte Product dieses Theils in den 2ten Theil und das Quadrat des 2ten addirt, wenn man das Quadrat einer 2theiligen Wurzel haben will.

Zum Quadrat einer 2theiligen Wurzel wird das doppelte Product der Summe der vorhergehenden Theile $(a + b)$ in den 3ten und das Quadrat des 3ten addirt, um das Quadrat einer dreitheiligen Wurzel zu erhalten.

Um das Quadrat einer 4theiligen Wurzel zu machen, müste man zum Quadrat der dreitheiligen das Nämliche addiren, nämlich das doppelte Product der Summe aller 3 ersten Theile $(a + b + c)$ in den 4ten und das Quadrat des 4ten.

Man sieht nun, daß sich dieses auf noch mehrere Theile erstrecken läßt, und daß man aus dem Quadrat einer n theiligen Wurzel das Quadrat für eine um noch einen Theil vermehrte Wurzel, d. i. für eine $(n + 1)$ theilige Wurzel erhält, wenn man noch das dop-

doppelte Product aus der Summe aller n Theile und dem neuen Theil und das Quadrat dieses neuen Theiles hinzuaddirt. Es ist also $(a+b+c+\dots+p+q)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2 + \dots + (a+b+c+\dots+p)q + q^2$.

Ist nun a von der n ten Ordnung: b von der $(n-1)$ ten: c von der $(n-2)$ ten p von der $(n-n+1)$ ten oder von der 1ten und q von der 0ten; so ist nach den bekannten Regeln der Multiplication

$$\begin{array}{rcl}
 \begin{array}{c} n \quad n \\ a \cdot a \end{array} & = & \begin{array}{c} 2n \\ a^2 \end{array} \\
 \begin{array}{c} 0 \quad n \quad n-1 \\ 2ab \end{array} & = & \begin{array}{c} n+n-1 \\ 2ab \end{array} = \begin{array}{c} 2n-1 \\ 2ab \end{array} \\
 \begin{array}{c} n-1 \quad n-1 \\ b \cdot b \end{array} & = & \begin{array}{c} 2n-2 \\ b^2 \end{array} \\
 \begin{array}{c} n-1 \quad n-2 \\ 2(a+b)c \end{array} & = & \begin{array}{c} 2n-3 \\ 2(a+b)c \end{array} \\
 \begin{array}{c} n-2 \quad n-2 \\ c \cdot c \end{array} & = & \begin{array}{c} 2n-4 \\ c^2 \end{array} \\
 \text{u.} & \text{f.} & \text{w.} \\
 \begin{array}{c} \quad \quad \quad 1 \quad 0 \\ 2(a+b+c+\dots+p)q \end{array} & = & \begin{array}{c} \quad \quad \quad 1 \\ 2(a+b+c+\dots+p)q \end{array} \\
 \begin{array}{c} 0 \quad 0 \\ q \cdot q \end{array} & = & \begin{array}{c} 0 \\ q^2 \end{array}
 \end{array}$$

Es finden also für die Glieder, wie sie auf einander folgen, diese Ordnungszahlen statt:

$$\begin{array}{c} 2n \quad 2n-1 \quad 2n-2 \quad 2n-3 \quad 2n-4 \quad \quad \quad 1 \quad 0 \\ a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2 + \dots + 2(a+b+c+\dots+p)q + q^2. \end{array}$$

Daraus erhellen folgende Sätze:

- 1) Wenn die Wurzel $(n+1)$ Ziffern hat; so hat die Quadratzahl wenigstens $2n+1$ höchstens $2n+2$ Ziffern, weil a^2 , auf welches noch $2n$ Ziffern folgen, entweder selbst aus einer oder 2 Ziffern bestehen muß.
- 2) Von allen einzelnen Theilen der Wurzel kommen die Quadrate einzeln in der Quadratzahl vor: a^2 . b^2 . u. f. w.
- 3) Die Ordnungszahl aller Quadrate ist eine grade Zahl, die der doppelten Producte eine ungerade.
- 4) Wenn man eine Quadratzahl von der rechten gegen die linke Hand in Klassen abtheilt, so daß in jeder Klasse 2 Ziffern stehen, nur die letzte Klasse ausgenommen, die auch nur eine haben kann; so ist die niedrigste Ziffer jeder Klasse von einer geraden Ordnung. So viel also Klassen sind, so viele Ziffern von grader Ordnung sind vorhanden und so viele Theile hat die Wurzel,

§. 46.

Aufgabe.

Aus einer vielziffrigen Zahl A die Quadratwurzel zu ziehen.

Auflösung.

- 1) Man theile A in Klassen, so wie §. 45 Nr. 4 erwähnt ist, suche aus der höchsten Klasse die Wurzel a und ziehe a^2 von dieser Klasse ab,

2)

2) Die höchste Ziffer der folgenden Klasse, zu der noch der Rest der vorigen genommen wird, dividire man mit dem doppelten bereits gefundenen Theil der Wurzel, der Quotient wird der nächste Theil (b) seyn, der aber so beschaffen seyn muß, daß man noch $2ab$ von den Ziffern der ungraden und b^2 von der Ziffer der nächstfolgenden graden Ordnung nebst dem Rest der vorigen abziehen könne. Die höchste Ziffer einer Klasse muß nämlich immer eine ungrade die niedrigste eine grade Ordnungszahl haben.

3) Die nun gefundenen beiden Theile der Wurzel ($a+b$) sehe man nun als den ersten ($= s$) an; so kann man nach Nr. 2 den 3ten $= c$ finden, und den 4ten wenn man $a+b+c = s$ für den ersten ansieht u. f. w.

1. *Beispiel.*

Man verlangt die Wurzel aus 394384

	4 3 2 1 0	
	39 43 84	$a = 600$
$a^2 =$	36 00 00	$b = 20$
	343 84	$c = 8$
$2a$ (als Divisor) $=$	120 00	628 ist folglich die Wurzel.
$2ab =$	240 00	
	103 84	
$b^2 =$	4 00	
	99 84	
$2(a+b) = 2s =$	12 40	
$2sc =$	99 20	
	64	
$c^2 =$	64	
	0	

Die

Die höchste Klasse ist 39, daraus ist die Wurzel 6,
oder weil 39 von der Ordnung 4 ist, $\overset{2}{6} = 600. = a.$

Der Rest, nachdem $a^2 = 36$ von 39 abgezogen wurde, ist 3. Wird dieser zur nächsten Ziffer, d. i. zur höchsten Ziffer der folgenden gezogen; so erhält

$$\text{man } \overset{4}{3}\overset{3}{4} = \overset{3}{34}.$$

Aber $\overset{3}{34}$ durch $\overset{2}{12}$ ($= 2a$) dividirt giebt $\overset{1}{2}$ ($= b$) zum Quotienten, der so beschaffen ist, daß man $2ab$

$$= \overset{2}{2} \cdot \overset{1}{6} \cdot \overset{3}{2} = \overset{3}{24} \text{ von } \overset{3}{34} \text{ abziehen kann, wobei der Rest}$$

$\overset{3}{10}$ übrig bleibt, der mit der nächsten Ziffer $\overset{2}{3}$ zusam-

men genommen $\overset{2}{103}$ ausmacht, wovon sich $b^2 = \overset{2}{4}$

leicht abziehen läßt. Der Rest ist $\overset{2}{99}$.

Die beiden Theile $\overset{2}{6} \overset{1}{+} \overset{1}{2}$ gelten nun für den ersten
Theil $= \overset{1}{62}.$

Die höchste Ziffer der folgenden Klasse ist $\overset{1}{8}.$

Der Rest $\overset{2}{99}$ damit vereinigt giebt $\overset{1}{998}$, welches durch

$$2^s = \overset{1}{2} \cdot \overset{1}{62} = \overset{1}{124} \text{ dividirt werden muß; der Quo-}$$

tient ist $8 = c$ und zwar so, daß man $2sc = \overset{1}{992}$
bequem

bequem von 998^1 , und $c^2 = 64^0$ von $4^0 +$ dem Rest des nächstvorigen Abzugs, der $= 6^1$ war, also von 64^0 abziehen kann.

Begreiflich kann man die Nullen, die in der Rechnung mit fortgeführt worden sind, auch weglassen. Bei der Quadratzahl dient die Eintheilung in Klassen, daß man die rechte Stelle nicht verfehlt und in der Wurzel wird die Ordnung der Ziffer durch die Ordnung, wie man sie nach einander findet, bestimmt.

2. Beispiel.

Man verlangt die Quadratwurzel aus 43217476

	a	b	c	d
	6	5	7	4
a^2	36	..	..	..
	7	2	..	..
$2a$	= 12	..	..	..
$2ab$	= 60	..	..	..
	1	21	..	..
b^2	= 25	..	..	..
	9	6	7	..
$2(a+b)$	= $2s$	= 13	0	..
$2sc$	= 91	0	..	..
	5	74	..	..
c^2	= 49	..	..	..
	5	25	7	..
$2(a+b+c)$	= 15	1	4	..
$2(a+b+c)d$	= 52	5	6	..
			16	..
d^2	=		16	..
				0

Zu f.

Zuf. 1. Wenn a von der Ordnung 0, b von der -1 ten, c von der -2 ten, p von $-(n-1)$ ten und q von der $-n$ ten ist; so sieht man leicht aus der Rechnung mit Decimalbrüchen, daß den Gliedern von $(a+b+c+\dots+p+q)^2$ folgende Ordnungszahlen zugehören:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & -1 & -2 & & -3 & -4 & & -(2n-1) & -2n \\ a^2 & + 2ab & + b^2 & + 2(a+b)c & + c^2 & + \dots & + 2(a+b+\dots+p)q & + q^2 \end{array}$$

Daraus sieht man, wie man bei Decimalbrüchen zu verfahren hätte. Das Verfahren ist ganz dasselbe, wie bei ganzen Zahlen, nur mit der Vorsicht, daß die letzte Stelle des Quadrats von einer geraden Ordnung seyn müßte; wollte man daher z. B. aus 3,785 die Wurzel ziehen; so müßte man die Zahl erst in die Gestalt 3,7850 bringen, und die Rechnung wäre folgende:

3	78	50	1,94...
1			
2	7.		
	2.		
1	8.		
98			
81			
17	5		
3	8		
15	2		
2	30		
16			
2	14...		

Die Wurzel wäre also 1,94... bis auf Hunderttheile gefunden. Wollte man sie genauer haben, so könnte man die Quadratzahl 3,785000 3,78500000 u. f. w. annehmen, oder immer mehr Nullen paarweise hinzusetzen; so fände man die Wurzel bis auf Tausendtheilchen u. f. w.

Zus. 2. Dieses Verfahren dient auch, sich dem Werthe der Wurzel aus solchen Zahlen zu nähern, die keine eigentlichen Quadratzahlen sind. Verlangte man die Wurzel aus 2; so könnte man statt 2 setzen 2,00 oder 2,0000 oder 2,000000 u. f. w. jenachdem man die Wurzel bis auf Zehnthelle, Hunderttheile, Tausendtheile u. f. w. haben wollte. Die Rechnung wäre folgende:

2,	00	00	00	00	00	1,41421
1						
1	0					
	2					
	8					
	20					
	16					
	4	00				
	2	8				
	2	8				
	1	20				
	1					
	1	19	0			
		28	2			
	1	12	8			
	6	20				
	16					
	6	04	0			
	2	82	8			
	5	65	6			
	38	40				
	4					
	38	36	0			
	28	28	4			
	10	07	60			
			1			
	10	07	59	u. f. w.		

So kann man also 1,4 oder 1,41 oder 1,414 oder 1,41421 für die Quadratwurzel aus 2 nehmen, je nachdem man diesen Werth genau oder minder genau verlangt.

Lehrsatz.

Wenn u , welches größer ist als a , sich nicht ohne Rest durch a dividiren läßt; so kann auch u^2 durch a^2 nicht ohne Rest dividirt werden; oder wenn $\frac{u}{a}$ durch keine ganze Zahl dargestellt werden kann; so läßt sich auch $\frac{u^2}{a^2}$ durch keine ganze Zahl darstellen.

Beweis.

Wenn sich u durch a nicht ohne Rest theilen läßt, so kann a kein Factor von u seyn. Wenn man sich also u als ein Product vorstellt; so wird unter seinen Factoren nie ein a vorkommen. Es sey daher $u = f \cdot g = g \cdot h \cdot i = i \cdot k \cdot l \cdot m$, u. s. w.; so ist $u^2 = f^2 \cdot g^2 = g^2 \cdot h^2 \cdot i^2 = i^2 \cdot k^2 \cdot l^2 \cdot m^2$, woraus erhellt, daß, wenn u unter seinen Factoren keinen hat, der a heißt, auch in u^2 kein Factor a^2 vorkomme, daß also $\frac{u^2}{a^2}$ sich durch keine ganze Zahl ausdrücken läßt.

Zus. Läßt sich daher die Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl n nicht in ganzen Zahlen angeben; so läßt sich dieselbe auch durch keine daran gehängten Brüche ausdrücken. Denn gesetzt es wäre $\sqrt{n} = \frac{u}{a}$ oder so eine ganze Zahl mit

mit angehängten Bruch; so folgte, dafs $\frac{u^2}{a^2} = n$.

Da aber $\frac{u^2}{a^2}$ keine ganze Zahl feyn kann; so kann

auch $\sqrt{n}$ nicht $= \frac{u}{a}$ feyn. Solche Gröfsen nun,

wie $\sqrt{n}$, heiffen Irrational-Gröfsen, d. i. folche deren Verhältnifs zu andern Zahlen weder durch die Einheit noch durch Theile derfelben angegeben werden kann. Ein Beifpiel hiezu fteht §. 46 Zuf. 2. am Ende.

Ob nun gleich der Werth einer folchen Gröfse nie völlig genau beftimmt werden kann; fo fieht man doch ebendafelbft, wie man fich demfelben fo weit man will nähern könne. Diefte Näherung gefchieht dadurch, dafs man zu dem beftimmbaren Theile des Werthes nach und nach immer mehr kleine Zufätze findet, wodurch natürlich der unbestimmbare Theil verkleinert und endlich fo weit verkleinert wird, dafs man ihn ganz vernachläffigen kann.

So ift z. B. $\sqrt{2} = 1 + x = 1,4 + x = 1,41 + x$
 $= 1,414 + x = 1,414213 \dots$ Die unbe-

ftimmbaren Theile x, x, x u. f. w. werden immer unbedeutender, fo wie mehr beftimmbare Theile gefucht werden. Wenn man diefe ver-

verschiedenen Wurzeln von 2 mit sich multiplicirt; so wird man finden, daß sich ihre Quadrate immer mehr der 2 nähern. Beim letzten Werthe von $\sqrt[2]{2}$ ist das Quadrat nur ein Milliontheilchen von 2 verschieden.

§. 48.

Aufgabe.

Wenn man $a^2 + 2ab + b^2$ mit $(a + b)$ multiplicirt; so erhält man $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, welches also $= (a + b)^3$ ist. Bedeutet a wieder einen Zehner und b einen Einer wie §. 44; so findet für den Cubus einer zweitheiligen Wurzel folgende Ordnung in den Ordnungszahlen der einzelnen Glieder statt:

$$\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ a^3 & + 3a^2b & + 3ab^2 & + b^3. \end{array}$$

Da a^3 noch drei Ziffern hinter sich hat, selbst aber aus einer, zwey oder drey Ziffern bestehen kann; so hat jede Cubiczahl der Wurzeln von 10 bis 99 wenigstens 4 höchstens 6 Ziffern.

Nach dieser Vorbereitung ist es leicht, die Aufgabe aufzulösen, wie aus jeder 4 bis 6ziffrigen Würfelzahl die Wurzel des 3ten Grades gefunden werden könne.

- 1) Man suche die größte Cubicwurzel, deren Cubus von den Tausenden der vorgegebenen Zahl abgezogen werden kann. Diese ist $= a$.

2)

2) Den Rest nach diesem Abzug verbinde man mit der nächstfolgenden Ziffer von der 2ten Ordnung und dividire diese Anzahl von Hunderten durch das 3fache Quadrat des gefundenen ersten Theils der Wurzel ($3a^2$); der Quotient wird der 2te Theil $= b$ seyn.

3) Bey dieser Division ist aber noch darauf zu sehen, dafs, nachdem $3a^2b$ von der in Nr. 2. erwähnten Anzahl von Hunderten abgezogen ist, von dem Rest $+$ der Ziffer der ersten Ordnung noch $3ab^2$, und von diesem neuen Rest $+$ der Ziffer der 3ten Ordnung noch b^3 abgezogen werden kann.

1. Beispiel.

		3210	a	b
$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$=$	50653	1	0
a^3	$=$	27	3	7
$3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$=$	23653		
$3a^2$ (Divisor)	$=$	27..		
$3a^2b$	$=$	189..		
$3ab^2 + b^3$	$=$	4753		
$3ab^2$	$=$	441		
b^3	$=$	343		
b^3	$=$	343		
		0		

Die Tausende in diesem Beispiele sind 50. Die größte Würfelzahl die hievon abgezogen werden kann, ist 27: denn die nächste ist schon 64. Also ist $\overset{1}{3}$ der erste

erste Theil der Wurzel, $50^3 - 27^3 = 23^3$. Dazu die Ziffer der zweiten Ordnung addirt giebt $23^3 + 6^2 = 236$. Dieses soll durch $3a^2 = 3 \cdot 3^2 = 3 \cdot 9 = 27$ dividirt werden, damit man den zweiten Theil erfährt.

Der Quotient könnte 8^0 seyn, denn $3a^2b = 8^0 \cdot 27^2 = 216$, welches wenn man es von 236^2 abzieht, noch den Rest 20^2 übrig läßt. Von diesem Reste nebst der nächsten Ziffer 5^1 , also von 205^1 , müßte sich aber noch nach Nr. 3. $3ab^2 = 3 \cdot 3^1 \cdot 64^0 = 576^1$ abziehen lassen. Da dieses nicht angeht; so ist der Quotient 8 zu groß, also nicht $= b$.

Versucht man 7; so ist $3a^2b = 3 \cdot 3^2 \cdot 7^2 = 189$. Der Rest ist 47^2 . Von $47^2 + 5^1 = 475^1$ läßt sich $3ab^2 = 3 \cdot 3^1 \cdot 7^2 = 441^1$ abziehen und es bleibt der Rest 34^1 .

Von diesem 34^1 endlich $+ 3^0 = 543^0$ läßt sich noch $b^3 = 343^0$ abziehen. Die Wurzel ist also $3^1 + 7^0 = 37$. Zur leichtern Ausübung der Vorschrift Nr. 1. kann man die Tabelle der Würfelzahlen von 1 bis 9 vor Augen haben.

Wur-

Wurzel	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Würfelz.	1 8 27 64 125 216 343 512 729

2. *Beispiel.*

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$\equiv$	195112		a	b
a^3	$\equiv$	125		1	0
$3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$\equiv$	701		5	8
$3a^2$	$\equiv$	(75)			
$3a^2b$	$\equiv$	600			
$3ab^2 + b^3$	$\equiv$	1011			
$3ab^2$	$\equiv$	960			
b^3	$\equiv$	512			
b^3	$\equiv$	512			
		0			

§. 49.

Aufgabe.

Ueber die Zusammensetzung der Würfelzahlen vieltheiliger Wurzeln lassen sich die nämlichen Untersuchungen anstellen, wie §. 45 über die Quadrate.

Ist nämlich $a+b = s$; so ist $(a+b+c)^3 = (a+s)^3 = s^3 + 3s^2c + 3sc^2 + c^3 = (a+b)^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3$.

Durch Fortsetzung dieser Betrachtung findet man $(a+b+c+d)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3 + 3(a+b+c)^2d + 3(a+b+c)d^2 + d^3$.

Und

Und allgemein ist $(a + b + \dots + p + q)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3 + \dots + 3(a+b+\dots+p)^2q + 3(a+b+c\dots p)q^2 + q^3$.

Ist nun a von der n ten Ordnung, b von der $(n-1)$ ten $\dots$ p von der ersten, q von der 0 ten; so ergibt sich;

$$\begin{array}{rcl}
 \begin{array}{c} n \quad n \quad n \\ a \cdot a \cdot a \end{array} & = & \begin{array}{c} 3n \\ a^3 \end{array} \\
 \begin{array}{c} n \quad n \quad n-1 \\ 3a \cdot a \cdot b \end{array} & = & \begin{array}{c} n+n+n-1 \\ 3a^2b \end{array} = \begin{array}{c} 3n-1 \\ 3a^2b \end{array} \\
 \begin{array}{c} n, n-1, n-1 \\ 3a \cdot b \cdot b \end{array} & = & \begin{array}{c} n+(n-1)+(n-1) \\ 3a \cdot b^2 \end{array} = \begin{array}{c} 3n-2 \\ 3ab^2 \end{array} \\
 \begin{array}{c} (n-1)(n-1)(n-1) \\ b \cdot b \cdot b \end{array} & = & \begin{array}{c} 3n-3 \\ b^3 \end{array} \\
 \begin{array}{c} n-1 \quad n-1 \quad n-2 \\ 3(a+b)(a+b)c \end{array} & = & \begin{array}{c} 3n-4 \\ 3(a+b)^2c \end{array} \\
 \begin{array}{c} n-1 \quad n-2 \quad n-2 \\ 3(a+b) \cdot c \cdot c \end{array} & = & \begin{array}{c} 3n-5 \\ 3(a+b)c^2 \end{array} \\
 \begin{array}{c} n-2 \quad n-2 \quad n-2 \\ c \cdot c \cdot c \end{array} & = & \begin{array}{c} 3n-6 \\ c^3 \end{array} \\
 \text{u.} & \text{f.} & \text{w.}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \begin{array}{c} 1 \\ 3(a+b+\dots p) \end{array} \begin{array}{c} 1 \quad 0 \\ (a+b+\dots p)q \end{array} & = & \begin{array}{c} 2 \\ 3(a+b+\dots p)q \end{array} \\
 \begin{array}{c} 1 \quad 0 \quad 0 \\ 3(a+b+\dots p)q \cdot q \end{array} & = & \begin{array}{c} 1 \\ 3(a+b+\dots p)q^2 \end{array} \\
 \begin{array}{c} 0 \\ q^3 \end{array} & = & \begin{array}{c} 0 \\ q^3 \end{array}
 \end{array}$$

Die einzelnen Glieder der Würfelzahl dieser vieltheiligen Wurzel haben daher folgende Ordnungszahlen

$$\begin{aligned} & 3^n a^3 + 3^{n-1} a^2 b + 3^{n-2} a b^2 + b^3 + 3^{n-4} (a+b)^2 c + 3^{n-5} (a+b) c^2 + c^3 + \dots \\ & + 3(a+b+\dots+p)^2 q + 3(a+b+\dots+p) q^2 + q^3. \end{aligned}$$

Aus diesem Ausdrücke geht hervor:

- 1) Aus dem Cubus einer eintheiligen Wurzel wird durch einen Zusatz von 3 gewissen Gliedern der Cubus einer zweitheiligen; aus dem Cubus einer 2theiligen durch einen Zusatz von 3 Gliedern der Cubus einer 3theiligen, und überhaupt wird aus dem Cubus einer ntheiligen Wurzel durch einen solchen Zusatz der Cubus einer $(n+1)$ theiligen. Diese 3 Zusätze sind: a) Das 3fache Product des Quadrats der Summe aller ersten n Theile, mit dem $(n+1)$ ten Theil. b) Das 3fache Product der Summe aller n Theil mit dem Quadrat des $(n+1)$ ten Theils. c) Der Cubus des $(n+1)$ ten Theils.

- 1) Eine $(n+1)$ ziffrige Wurzel $(a + b + \dots + p + q)$ hat wenigstens eine $(3n+1)$ ziffrige höchstens $(3n+3)$ ziffrige Cubiczahl; denn a^3 hat noch $3n$ Ziffern hinter sich und besteht selbst entweder aus einer, zwei oder drei Ziffern.

- 3) Jede Ordnung, deren Ordnungszahl ein Dreifaches ist, enthält den Würfel eines einzelnen Theils der Wurzel. Theilt man daher eine Cubikzahl in Klassen von der rechten zur linken Hand

Hand, so daß in jeder Klasse 3 Ziffern stehn, die höchste ausgenommen, die nur eine oder 2 haben könnte; so ist die Ordnungszahl der niedrigsten Ziffer jeder Klasse ein Dreifaches; die Wurzel hat also so viel Theile, als die Würfelzahl Klassen hat

§. 50.

Aufgabe.

Aus jeder vielziffrigen Zahl die Cubicwurzel zu ziehen.

Auflösung.

- 1) Die Zahl wird in solche Klassen getheilt, wie §. 49 Nr. 3 erwähnt sind.
- 2) Man sucht die Cubikwurzel aus der Zahl, die in der höchsten Klasse steht; sie ist der erste Theil der Wurzel $= a$. Ihr Cubus wird von der Zahl der höchsten Klasse abgezogen. Ist die niedrigste Ziffer dieser Klasse von der Ordnung $3m$; so ist a von der Ordnung m .
- 3) Mit dem Rest wird die höchste Ziffer der nächsten Klasse verbunden. Diese Summe, die von der Ordnung $(3m-1)$ ist, wird durch das dreifache Quadrat des ersten Theils der Wurzel $3a^2$ dividirt. Der Quotient ist der 2te Theil der Wurzel $= b$. Da nämlich $3a^2$ von der $2m$ ten Ord-

Ordnung ist; so ist b von der $[(3m-1)-2m]$ ten d. i. von der $(m-1)$ ten.

4) Bei diesem Quotienten b ist darauf zu sehen, daß nachdem man $3a^2b$ (d. i. das Product des Quotienten und Divisors) von den Zahlen der $(3m-1)$ ten Ordnung abgezogen hat, noch so viel übrig bleibt, daß von der mittlern Ordnung dieser Klasse, die die $(3m-2)$ te ist, noch $3ab^2$ und von der niedrigsten, d. i. von der $(3m-3)$ ten Ordnung noch b^3 abgezogen werden kann. Vor dem Abzuge wird begreiflich noch der Rest des nächstvorhergehenden Abzuges mit der folgenden Ziffer verbunden.

5) Die beiden Theile $a + b$ sieht man nun als der ersten an, und wiederholt die Vorschrift 3 u. 4 so lange bis man den letzten Theil der Wurzel hat.

1. Beispiel.

$$\sqrt[3]{62099136} = x.$$

			a	b	c
$a^3 + 3a^2b + \dots + c^3$	$=$	62 099 136	3	0	0
a^3	$=$	$\overset{2}{3} \cdot \overset{2}{3}$		9	0
	$=$	27 000 000			6
$3a^2$ (als Divisor)	$=$	35 099 136			
$3a^2b$	$=$	(2 7)			
	$=$	24 300 000			Also 396=x
$3ab^2$	$=$	10 799 136			
	$=$	7 290 000			
b^3	$=$	3 509 136			
	$=$	729 000			
	$=$	2 780 136			
$3(a+b)^2 = 3 \cdot \overset{1}{39}^2$	$=$	456 3			
$3(a+b)^2c$	$=$	2 737 800			
	$=$	42 336			
$3(a+b)c^2$	$=$	42 120			
	$=$	216			
c^3	$=$	216			
	$=$	0			

In der höchsten Klasse steht ⁶62. Die größte Cubicwurzel daraus ist 3 und hier ²3. Der Würfel davon ist ⁶27 und ⁶62 — ⁶27 = ⁶35.

Die erste Ziffer der nächsten Klasse ist 0, der Rest dazu giebt ⁵350. $3a^2 = 3 \cdot \overset{2}{3} = \overset{4}{27}$. Der Quotient, wenn man ⁸350 mit ⁴27 dividirt, ist daher ¹9. Nach ganz vollendeter Division, d. i., nachdem das Product

duct des Quotienten mit dem Divisor ($\overset{5}{=} 243$) vom Dividenden ($\overset{5}{=} 350$) abgezogen worden ist, wo der Rest $\overset{5}{107}$ übrig blieb; kann noch von diesem Reste $\overset{5}{+}$ der mittlern Ziffer dieser Klasse ($\overset{5}{=} 107 \overset{4}{+} 9 \overset{4}{=} 1079$) die Gröfse $3ab^2 \overset{3}{=} 33 \cdot \overset{1}{9} \cdot \overset{1}{9} \overset{4}{=} 729$ abgezogen werden und der Rest ist $\overset{4}{=} 350$.

Setzt man zu diesem Rest die niedrigste Ziffer dieser Klasse; so erhält man $\overset{4}{350} \overset{3}{+} 9 \overset{3}{=} 3509$, wovon sich wieder $b^3 \overset{1}{=} 9^3 \overset{3}{=} 729$ abziehen läfst, der Rest ist $\overset{3}{2780}$.

Die Bedingungen der Vorschrift Nr. 4 sind also erfüllt, und b ist $\overset{1}{=} 9$.

Die 2 ersten Theile $a \overset{2}{+} b$ sind also $\overset{2}{3} \overset{1}{+} 9$. Diese zusammen sieht man nun für den ersten Theil an $\overset{1}{=} 39$.

Da nun der Cubus dieses ersten Theils schon ganz abgezogen ist (er bestand nämlich aus $\overset{6}{27} \overset{5}{+} 343 \overset{4}{+} 729 \overset{3}{+} 729$); so ist es anzusehen, als wenn man
in

in Betreff dieses ersten Theils der Wurzel (39) die Vorschrift Nr. 2 schon erfüllt hätte; man kann daher nach Nr. 3 und 4 den 2ten Theil c finden.

Der Rest war 2780^3 , die erste Ziffer der nächsten Klasse ist 1; es muß daher $2780^3 + 1^2 = 27801^2$ durch $3(a + b)^2 = 3 \cdot 39^2 = 4563^2$ dividirt werden. Der Quotient ist $6 = c$, der Divisions-Rest $= 423^2$.

Die mittlere Ziffer der Klasse dazu genommen giebt 4233^1 . Davon kann $3(a + b)c^2 = 3212^1$ abgezogen werden; der Rest ist 21^1 . Dieser Rest mit der niedrigsten Ziffer dieser Ordnung verbunden $21^1 + 6^0 = 216$, ist grade so groß, daß noch $c^3 = 216$ sich davon abziehen läßt. Daher ist $c = 6$ und die ganze Wurzel $= 396$.

2. Beispiel.

477	963	600	459	7818
343	...	...	...	
134	9..	...	...	
(14	7).	...	...	
117	6..	...	...	
17	36	...	...	
13	44.	...	...	
3	923	...	...	
	512	...	...	
3	411	6..	...	
(1	825	2).	...	
1	586	40.	...	
	2	34.	...	
1	584	060	...	
		1	...	
1	584	059	4..	
	(182	988	3).	
1	463	906	4..	
	120	153	05.	
	1	499	12.	
	118	653	939	
			512	
	118	653	427	

Die Wurzel ist etwas mehr 7818 weil beim Abzug von $8^3 = 512$ noch ein Rest blieb. Der Rest aber zeigt keinen Bruch an, sondern was §. 47 in Betreff der Quadrate gelehrt wurde das gilt auch hier, die Wurzel ist eine irrationelle Gröfse.

Eben so kann man hier wie bei den Quadraten die Zusammensetzung der Cubiczahl für Theile der

G

Wur-

Wurzel, die von negativen Ordnungen, das ist Decimalbrüche sind, wobei sich ergibt, daß die Cubiczahlen der einzelnen Theile der Wurzel auf negativen Ordnungen stehn, die immer das Dreifache der Ordnung dieses Theils der Wurzel sind. Wäre

q^{-n} der letzte Theil einer Wurzel, so wäre q^{3n} der letzte Theil der Cubiczahl. Will man sich also dem Werthe der Wurzel nähern, so muß die letzte negative Ordnung immer ein Dreifaches seyn. Das ist, wollte man

$\sqrt[3]{2}$; so müßte man 2,000 zur Cubiczahl nehmen, um die Wurzel bis auf Zehnthteile zu haben. Für Hunderttheile müßte man 2,000000 nehmen u. s. w. So müßte man, um diese Wurzel bis auf Milliontheilchen zu finden, 18 Nullen an die 2 hängen, die letzte Null nämlich müßte von der 3.6ten d. i. 18ten negativen Ordnung seyn, und dies wäre dann $\sqrt[3]{2} = 1,259920\dots$. Wollte man die Wurzel des 2ten Beispiels bis auf Zehnthteile haben, so dürfte man nur an den letzten Rest 3 Nullen hängen und nach Nr. 3. u. 4. weiter rechnen.

Hinten kommen Tafeln vor, die zum Ausziehen der Quadrat und Cubicwurzeln Dienste bieten.

Von den Verhältnissen.

§. 51.

Erklärung.

Verhältniß zweier Zahlen a und b heißt ihre Vergleichung in Absicht ihrer Gröfse. Dies geschieht auf doppelte Art: denn entweder sieht man bei dieser Vergleichung darauf, dafs a um einiges gröfser oder kleiner ist als b , oder dafs a etliche Male so grofs als b ist.

Die Vergleichung der ersten Art heißt ein arithmetisches Verhältniß; nach der zweiten Art bekommt man ein geometrisches.

Jedes Verhältniß hat daher 2 Glieder.

Ueberlegt man z. B., dafs 12 um 9 gröfser ist als 3, so betrachtet man die Zahlen 3 und 12 in ihrem arithmetischen Verhältnisse.

Sieht man aber bei dieser Vergleichung darauf, dafs 12 vier Mal so grofs ist als 3; so stellt man sich das geometrische Verhältniß der Zahlen 3 und 12 vor.

Die Bezeichnung ist diese:

$a - b$ — Ausdruck des arithmetischen Verhältnisses der Zahlen a und b zu einander

$a : b$ — Geometrisches Verhältniß der Zahlen a und b zu einander.

Zuf. 1. Die Vergleichung zweier Zahlen wird durch ihren Unterschied (d) ausgedrückt, wenn man darauf sieht um wie vieles die eine größer ist als die andere. Es finden aber 2 Fälle statt, da nämlich entweder b oder a das größte Glied ist.

α) Für den ersten Fall sey $a + d = b$.

β) Für den zweiten Fall sey $b + \delta = a$ oder $b = a - \delta$ oder $a + (-\delta) = b$.

Nennt man das, was man zum ersten Glied addirt, um das zweite zu erhalten, überhaupt d ; so ist für beide Fälle $b = a + d$, nur ist für den 2ten Fall d negativ oder $= -\delta$.

Bei dem Verhältniß $3 - 12$ ist der Unterschied $+ 9$; bei dem Verhältnisse $12 - 3$ ist er $- 9$.

Zuf. 2. Beim geometrischen Verhältnisse muß ein Glied etliche Mal größer seyn als das andere, d. i. das kleinere muß etliche Mal im größern enthalten seyn. Da auch hier zwei Fälle statt finden; so sey

α) Für den Fall, da a kleiner ist, a in b e mal enthalten oder $\frac{b}{a} = e$. Daraus folgt $b = ae$.

β)

β) Für den Fall, da b kleiner ist, sey b in a ε mal
 enthalten, oder $\frac{a}{b} = \varepsilon$. Daraus folgt $b\varepsilon$
 $= a$. Wird mit ε dividirt; so ist $b = \frac{a}{\varepsilon}$,
 oder $b = a \cdot \frac{1}{\varepsilon}$.

Die Zahl nun, womit das erste Glied (a) mul-
 tiplicirt wird, um das zweite zu erhalten, heist
 der *Exponent* des Verhältnisses, und war im
 ersten Fall $= e$ im zweiten $= \frac{1}{\varepsilon}$.

Nennt man den Exponenten überhaupt e ; so
 sieht man, daß es ganze Zahlen und Brüche be-
 deuten könne, und daß $e = \frac{b}{a}$ sey.

Beispiele.

Verhältnisse.	Exponenten.
1 : 3	3
3 : 15	5
16 : 2	$\frac{1}{8}$
2 : 3	$\frac{3}{2}$
5 : 2	$\frac{2}{5}$

Von

Von Proportionen.

§. 52.

Erklärungen.

- 1) Wenn zwei Verhältnisse gleich sind; so ist das ganze eine Proportion, und zwar eine arithmetische oder geometrische, je nachdem die gleichen Verhältnisse arithmetisch oder geometrisch waren.

Zwei arithmetische Verhältnisse sind gleich, wenn sie einerlei Differenz haben; zwey geometrische Verhältnisse sind gleich, wenn sie einerlei Exponenten haben.

So ist z. B. $3 - 12 = 7 - 16$ eine arithmetische
aber $2 : 8 = 5 : 20$.
und $3 : 2 = 9 : 6$ geometrische
Proportion.

Was erstes, zweites, drittes und viertes Glied, was die beiden mittlern oder innern und die beiden äußern Glieder heißen, fällt leicht in die Augen.

- 2) Beide Arten von Proportionen führen den Namen einer stetigen oder continuirlichen, wenn die beiden mittlern Glieder gleich sind.

Z. B. $5 - 8 = 8 - 11$. $2 : 6 = 6 : 18$.

3)

3) Haben 2 Arithmetische Verhältnisse einerlei aber entgegengesetzte Differenzen; so sind beide Verhältnisse einander entgegengesetzt, oder: das eine ist das umgekehrte des andern. Z. B. $3 - 5 = - (10 - 8)$.

Dasselbe sagt man auch von 2 geometrischen Verhältnissen, wenn das eine den Exponenten e , das andere den Exponenten $\frac{1}{e}$ hat.

Z. B. $3 : 15$ ist dem umgekehrten Verhältnisse von $5 : 1$ gleich.

§. 53.

Aufgabe.

Arithmetische Proportion.

Unter diesen bedarf blos die stetige einiger Betrachtung.

Ihr allgemeiner Ausdruck ist $a - b = b - c$.

Da $b = a + d$ und $c = b + d$ (§. 51 Zuf. 1); so läßt sich die ganze Proportion so vorstellen:

$$a - (a + d) = b - (b + d).$$

Addirt man die beiden äußern und die beiden mittlern Glieder; so erhält man $a + b + d$ und $a + d + b$, zwei Summen, die augenscheinlich einander gleich sind. Es müssen daher auch die

Sum-

Summen $a + c$ und $b + b$ oder $2b$ einander gleich seyn.

$$\text{Da nun } 2b = a + c; \text{ so ist } b = \frac{a+c}{2}.$$

Man findet also das mittlere Glied, wenn man die beiden äußern addirt und die Summe mit 2 dividirt.

Man nennt dieses: zwischen zwei Zahlen das arithmetische Mittel nehmen. Das arithmetische

Mittel zwischen 11 und 19 ist daher $\frac{11+19}{2} = 15$.

Hat man mehrere Zahlen aus denen man ein Mittel nehmen will; so addirt man sie sämmtlich und dividirt die Summe durch die Anzahl der Zahlen. Will man das Mittel von 7; 9; 10; 13; 11; so ist es

$$\frac{7 + 9 + 10 + 13 + 11}{5} = 10.$$

§. 54.

Arithmetische Progression.

Erklärung.

Wenn eine stetige Proportion weiter fortgesetzt wird; so entsteht eine arithmetische Progression oder Reihe. Zum Beispiel $2 - 4 = 4 - 6$; $6 - 8 = 8 - 10$; $10 - 12 = 12 - 14$ und so weiter.

Die

Die Reihe wäre also

2; 4; 6; 8; 10; 12; 14. u. f. w.

Ihre allgemeine Darstellung ist diese:

$a; (a + d); (a + 2d); (a + 3d); (a + 4d);$ u. f. w.,
wo a das erste Glied und d die Differenz der Glieder bezeichnet.

Wenn man die Glieder zählt; so findet sich beim ersten Glied kein d ; beim zweiten 1. d , beim 3ten 2. d u. f. w. und beim n ten also $(n-1)$ d . Jedes Glied ist eine Summe aus a und einigen d . Daher ist das n te Glied $= a + (n-1)d$, und eine Progression von n Gliedern hiesse.

$a; a+d; a+2d; \dots; a+(n-2)d; a+(n-1)d.$

Wenn man die Glieder Paarweise zusammenordnet, und zwar zum ersten Glied das letzte, zum 2ten das vorletzte u. f. w.; so sind die Summen dieser Paare alle gleich; denn die Summe des ersten und letzten Gliedes ist $= a + a + (n-1)d = 2a + (n-1)d$. Die Summe des 2ten und vorletzten $= 2a + d + (n-2)d = 2a + (n-1)d$. Die Summe des nächsten Paares $= 2a + (n-3)d + 2d = 2a + (n-1)d$ u. f. w. Der beständig gleiche Unterschied der Glieder hat dieses zur nothwendigen Folge.

Wüßte man die Summe des ersten und letzten Gliedes; so wüßte man auch aller übrigen Paare Betrag. Multiplicirte man daher die Summe des ersten und
letzten

letzten Gliedes mit der Anzahl der Paare; so hätte man die Summe der ganzen arithmetischen Progression. Da n die Anzahl der Glieder ist, so ist $\frac{n}{2}$ die Anzahl der Paare,

Nennt man das letzte Glied u ; so ist $(a+u) \frac{n}{2} = S =$ der Summe der Progression:

Die Anzahl der Glieder kann ungrad seyn, dann findet sich für das mittelfte Glied keines, das mit demselben ein Paar ausmache: das giebt also ein halbes Paar. Alsdann ist $\frac{n}{2}$ eine Zahl, an welcher der Bruch $\frac{1}{2}$ hängt. Um diesem auszuweichen, multiplicirt man $a+u$ mit n und dividirt das ganze Product mit 2; also $S = \frac{(a+u) n}{2}$.

Wenn das n te, wie angenommen wurde, das letzte Glied ist; so ist $u = a + (n-1)d$; daher ist $S = \frac{(2a + (n-1)d) n}{2}$. Dieses ist daher die allgemeine Auflösung, wenn aus a , d und n , S gesucht wird.

1. Beispiel.

Man verlangt die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis m . Hier ist $a = 1$; $d = 1$ und $n = m$,

$$n = m, \text{ auch } u = m; \text{ daher } \frac{(a+u)n}{2} = \frac{(1+m)m}{2} = \frac{m+m^2}{2} = S.$$

2. Beispiel.

Man sucht die Summe von 10 Gliedern der Progression 3, 5, 7 u. f. w. Hier ist $a = 3$; $d = 2$ und $n = 10$. Das 10te Glied $= u$ ist $3 + 9 \cdot 2 = 21$.

Also $\frac{(a+u)n}{2} = \frac{(3+21) \cdot 10}{2} = 120$. Ohne u erst zu suchen, hätte man nach der zweiten Formel gefunden $S = \frac{(2 \cdot 3 + 9 \cdot 2) \cdot 10}{2} = 120$.

Zuf. Man kann auch aus S , a und n , die man als gegeben ansieht, d und aus S , d und n ; a suchen.

- 1) Für den ersten Fall kann man auf folgende Weise eine Formel herleiten, aus der man das Verlangte findet:

Nach obigem ist

$$S = \frac{(2a + (n-1)d)n}{2}$$

Mit $2 = 2$ multiplicirt

$$\text{Giebt } 2S = (2a + (n-1)d)n$$

Mit $n = n$ dividirt

$$\text{Giebt } \frac{2S}{n} = 2a + (n-1)d$$

$$\begin{array}{rcl}
 2a & \equiv & 2a \\
 \hline
 \text{Bleibt } \frac{2S}{n} & - & 2a \equiv (n-1)d \\
 \text{Mit } n-1 & \equiv & (n-1) \quad \text{dividirt} \\
 \hline
 \text{Giebt } \frac{2S}{n(n-1)} & - & \frac{2a}{n-1} \equiv d
 \end{array}$$

Oder wenn man von $\frac{2a}{n-1}$ den Zähler und Nenner mit n multiplicirt.

$$\frac{2S}{n(n-1)} - \frac{2an}{n(n-1)} = \frac{2S-2an}{n(n-1)} = d.$$

Beispiel.

Eine Progression hat 10(n) Glieder, das erste ist 3(a), die Summe 120(S), wie groß ist der Unterschied (d)?

$$\begin{aligned}
 \text{Er ist} &= \frac{2 \cdot 120 - 2 \cdot 3 \cdot 10}{10 \cdot 9} = \frac{240 - 60}{90} = \\
 \frac{180}{90} &= 2.
 \end{aligned}$$

2) Um eine Formel für das erste Glied a zu finden, nehme man aus dem vorigen

$$\begin{array}{rcl}
 \frac{2S}{n} & \equiv & 2a + (n-1)d \\
 (n-1)d & \equiv & (n-1)d \quad \text{abgezogen} \\
 \hline
 \text{Bleibt } \frac{2S}{n} & - & (n-1)d \equiv 2a
 \end{array}$$

Mit

$$\begin{array}{rcl} \text{Mit } 2 & = & 2 \text{ dividirt} \\ \hline \text{Giebt } \frac{S}{n} & = & \frac{(n-1)d}{2} = a. \end{array}$$

Beispiel.

Die Differenz einer arithmetischen Progression ist $2(d)$, die Anzahl der Glieder $10(n)$, die Summe $120(S)$; wie groß ist das erste Glied (a) ?

$$\text{Es ist } = \frac{120}{10} - \frac{9 \cdot 2}{2} = 12 - 9 = 3.$$

§. 56.

Aufgabe.

Eigenschaften der geometrischen Proportion.

Wenn die 4 Glieder einer geometrischen Proportion a, b, c und d heißen, so daß $a:b = c:d$; so ist (§. 51 Zuf. 2) $b = ae$ und $d = ce$. Nach dieser Voraussetzung lassen sich leicht folgende Sätze von der geometrischen Proportion erweisen.

$$1) \ ad = bc. \quad \text{Denn } ace = aec. \quad \text{Zufaz. } d = \frac{bc}{a}.$$

$$2) \ \frac{a}{b} = \frac{c}{d}. \quad \text{Denn } \frac{a}{ae} = \frac{c}{ce}.$$

Zuf. Da man aus einer Proportion $a:b = c:d$

zwei gleiche Brüche $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ darstellen kann; so

findet man auch umgekehrt aus 2 gleichen Brü-

Brüchen eine Proportion. Wenn $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$; so ist
 $m : n = p : q$.

$$3) \frac{b}{a} = \frac{d}{c}. \quad \text{Denn } \frac{ae}{a} = \frac{ce}{c}.$$

4) $b : a = d : c$. Folgt vermöge des Zufazzes in
 Nr. 2, aus Nr. 3.

Anmerkung.

Diese Proportion heist in Bezug auf die erste zu
 Grund gelegte die *umgekehrte*.

5) $a : c = b : d$. Denn dafs $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ ist, erhellt,
 wenn man für b und d ihre Werthe ae und ce
 setzt; und aus $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ folgt die Nr. 5 angezeigte
 Proportion, die in Bezug auf die erste *alternirend*
 heist.

6) $am : bm = cn : dn$. Wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; so ist
 nach der Lehre von den Brüchen auch $\frac{am}{bm} = \frac{cn}{dn}$,
 woraus nach Zuf. in Nr. 2 die angegebene Pro
 portion folgt.

Zuf. 1. Für $m = n$ ist $am : bm = cm : dm$.

Zuf. 2. Für $m = 1$ ist $a : b = cn : dn$.

Zuf.

Zuf. 3. Für $n = 1$ ist $am : bm = c : d$.

7) $am : bn = cm : dn$. In Nr. 5 ist $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$: daher

auch $\frac{am}{cm} = \frac{bn}{dn}$. Daraus folgt nach Zuf. in

Nr. 2 $am : cm = bn : dn$. Alternirt man nach Nr. 5; so kommt $am : bn = cm : dn$.

Zuf. 1. Für $m = 1$ ist $a : bn = c : dn$.

Zuf. 2. Für $n = 1$ ist $am : b = cm : d$.

Zuf. 3. Wenn m und n Brüche bedeutet von der Gestalt $m = \frac{1}{q}$ und $n = \frac{1}{p}$; so ist $am =$

$\frac{a}{q}$ und $bn = \frac{b}{p}$. Wiederholt man die Sätze

von Nr. 6 und 7; so hat man auch $\frac{a}{q} : \frac{b}{p} =$

$\frac{c}{p} : \frac{d}{p}$ und $\frac{a}{q} : \frac{b}{p} = \frac{c}{q} : \frac{d}{p}$.

8) $a + b : b = c + d : d$. Denn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; also

auch $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$, oder weil $1 = \frac{b}{b} =$

$= \frac{d}{d}$ ist, $\frac{a}{b} + \frac{b}{b} = \frac{c}{d} + \frac{d}{d}$. Addirt

man die Brüche, so kommt $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$, woraus

die angezeigte Proportion folgt.

Zuf.

Zuf. 1. Es ist auch $\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$; daraus folgt auf dem nämlichen Wege, daß $a - b : b = c - d : d$. Will man beide Sätze vereinigt ausdrücken; so schreibt man $a \pm b : b = c \pm d : d$.

Zuf. 2. Wendet man gegenwärtigen Satz auf die Proportion in Nr. 4 an; so erhält man $b \pm a : a = d \pm c : c$. Wird daraus nach Nr. 4 die umgekehrte Proportion gemacht; so hat man $a : b \pm a = c : d \pm c$.

9) Wenn $A : B = C : D$, ferner $a : b = c : d$ und $\alpha : \beta = \gamma : \delta$; so ist $Aa\alpha : Bb\beta = Cc\gamma : Dd\delta$. Denn aus dem Angenommenen folgt

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

Daher auch $\frac{A}{B} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{C}{D} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{\gamma}{\delta}$

Oder $\frac{Aa\alpha}{Bb\beta} = \frac{Cc\gamma}{Dd\delta}$: daraus folgt nun

nach Zusatz in Nr. 2, $Aa\alpha : Bb\beta = Cc\gamma : Dd\delta$.

Zuf.

Zuf. Aus $a : b = c : d$ wird $a^2 : b^2 = c^2 : d^2$ und allgemein $a^n : b^n = c^n : d^n$. Für die 2te Potenz sieht man es ein, wenn man $A = 1$ und $\alpha = a$ annimmt, für die 3te Potenz, wenn man $A = \alpha = a$ setzt. Dafs es für alle Potenzen so fortgeht, ist daraus klar, weil man in Nr. 9. so viele Proportionen als man gewollt hätte, zu einer einzigen hätte vereinigen können.

Anmerkung.

Diese Vereinigung mehrerer Proportionen zu einer einzigen heifst sie *zusammensetzen* oder auch *addiren*. Um alles besser zu übersehen, schreibt man die einfachen Proportionen sämmtlich untereinander und unter sie die zusammengesetzte, als

$$\begin{array}{rcl} A : B & = & C : D \\ a : b & = & c : d \\ \alpha : \beta & = & \gamma : \delta \\ \hline Aa\alpha : Bb\beta & = & Cc\gamma : Dd\delta. \end{array}$$

Das Verhältnifs $Aa\alpha : Bb\beta$ nennt man das aus den Verhältnissen $A : B$, $a : b$ und $\alpha : \beta$ zusammengesetzte. Auf ähnliche Weise heifst $a^3 : b^3$ das 3fache Verhältnifs von $a : b$. Denn $a : b$ müfte man mit $a : b$ und $a : b$ verbinden, $a^3 : b^3$ zu erhalten. So versteht man auch den Ausdruck, wenn man sagt $a^n : b^n$ ist das nfache Verhältnifs von $a : b$.

H

Weil

Weil man $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$ mit $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$ verbinden müßte, um $a : b$ zu erhalten; so heißt $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$ das *halbirte* Verhältniß von $a : b$. $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$ ist der n te Theil des Verhältnisses von $a : b$. Man sieht, daß man hier addiren in einem etwas verschiedenen Sinne nimmt.

§. 57.

Regel de Tri.

I) *Verhältnisse der Waaren und Preise.*

Wenn W und w Waare einerlei Art und P und p ihre Preise bedeutet; so daß P zu W und p zu w gehört, außerdem auch W und w nur der Quantität nach verschieden sind, so wie auch P und p ; so ist gewiß $W : w = P : p$.

Wäre daher W und P bekannt, und man wollte p oder den Preis von einem bekannten w finden; so wäre nach §. 56 Nr. 1. Zuf. $p = \frac{P \cdot w}{W}$, wenn anders der Ausdruck einen Sinn hätte. Da er diesen nicht hat; denn Waaren mit Preissen multipliciren ist etwas ganz unverständliches; so ist noch folgendes zur Vorbereitung nöthig.

Es giebt Sachverhältnisse und Zahlenverhältnisse. Ein Sachverhältniß wäre z. B. das Verhältniß eines Getreidehaufens W zu einem andern w der m mahl größer

größer oder kleiner als der erste seyn kann. Von Zahlenverhältnissen allein eigentlich gelten die bisherigen Sätze. Die Sachverhältnisse können aber in Zahlenverhältnisse verwandelt werden, wenn man beide Glieder mit einem Maasse ausmisst. Der erste Getreidehaufen enthalte p Simmren der 2te q Simmren; so ist $W = p \cdot \text{Sr.}$ und $w = q \cdot \text{Sr.}$ Da nun gewiß $W : w = W : w$; so ist auch $W : w = p \cdot \text{Sr.} : q \cdot \text{Sr.}$

Es läßt sich aber sowohl $p \cdot \text{Sr.}$ als $q \cdot \text{Sr.}$ durch $\text{Sr.} =$ ein Simra dividiren; denn man kann offenbar fragen, wie oft ein Sr. in $q \cdot \text{Sr.}$ enthalten sey. Dividirt man daher nach §. 56. Nr. 6. Zuf. 2. und Nr. 7. Zuf. 3. das 3te und 4te Glied mit Sr. ; so erhält man

$$W : w = p : q \quad \text{Oder}$$

$$p \cdot \text{Sr.} : q \cdot \text{Sr.} = p : q.$$

Man kann daher statt des Sachverhältnisses $W : w$ oder $p \cdot \text{Sr.} : q \cdot \text{Sr.}$ das ihm gleiche $p : q$ setzen. Auch ist offenbar, daß dieses auch von $P : p$ gelten werde.

Es sey $P = m$ Thaler und $p = x$ Thaler; so ist $P : p = m : x$. Statt $W : w = P : p$ kann daher $p : q = m : x$ gesetzt werden, und x ist $= \frac{q \cdot m}{p}$.

Beispiel.

Der Preis von 60 Centnern ist 215 Thaler, man sucht den Preis von 8 Centnern. Er ist x Thaler.

Hier ist $W = 60$ Centner $P = 215$ Thaler.

$w = 8$ Centner $p = x$ Thaler.

Daher $W : w = 60 \text{ Centn.} : 8 \text{ Centn.} = 60 : 8.$

$P : p = 215 \text{ T.} : x \text{ T.} = 215 : x.$

Weil nun $W : w = P : p$; so folgt auch

$$60 : 8 = 215 : x.$$

$$\text{und } x = \frac{215 \cdot 8}{60} = \frac{215 \cdot 2}{15} = \frac{43 \cdot 2}{3} = \frac{86}{3} \\ = 28\frac{2}{3}.$$

Der Preis von 8 Centnern ist daher $28\frac{2}{3}$ Thaler.

Die Waaren W und w können auch in verschiedenen Maasscn angegeben seyn, z. B. W in Centnern und w in Pfunden.

Ich schreibe statt Centner C und statt Pfund lb und setze voraus das $n \text{ lb} = C.$

Nach dieser Voraussetzung kann eine jede Anzahl von C in lb und jede Anzahl von lb in C ausgedrückt werden. Lezteres giebt Brüche.

$$C = n \text{ lb}$$

$$2 C = 2n \text{ lb}$$

$$m C = m.n \text{ lb}$$

Um

Um also C in Hb zu verwandeln, muß man die Anzahl der C mit n multipliciren.

Weil $C = n \text{ Hb}$ so ist, wenn man mit n dividirt

$$\frac{C}{n} = \text{Hb}$$

$$\text{oder } \frac{1}{n} \cdot C = 1 \text{ Hb}$$

$$\frac{2}{n} \cdot C = 2 \text{ Hb}$$

$$\frac{m}{n} \cdot C = m \text{ Hb}$$

Um also m Hb in C auszudrücken, muß man m durch n dividiren: oder man muß die Anzahl der Hb durch n dividiren, der Quotient ist die Anzahl der Centner die m Hb gleich sind. Nach diesen Vorbereitungen ist klar, wie zu verfahren wäre, wenn W und w in verschiedenen Maassen ausgedrückt sind. Wüßte man, daß der Preis von 6 Centnern 18 Thaler betrüge, und man wollte den Preis von 3 Hb wissen; so hätte man

$$6 \text{ Centner} : 3 \text{ Hb} = 18 \text{ T.} : x \text{ T.}$$

Hier kann das Verhältniß $6 C : 3 \text{ Hb}$ nicht mit einer gleichen GröÙe dividirt werden, weil im ersten Gliede Centner im zweiten Hb sind.

Ver-

Verwandelt man aber die C. in Hb ; so ist

$$6.n\text{Hb} : 3\text{Hb} = 18\text{T.} : x\text{T.}$$

Oder für $n = 100$.

$$600\text{Hb} : 3\text{Hb} = 18\text{T.} : x\text{T.}$$

Dafür findet, wenn man die 2 ersten Glieder der Proportion mit Hb und die 2 letzten mit T dividirt (§. 56 Nr. 6) folgende Zahlenproportion statt:

$$600 : 3 = 18 . x.$$

und es ist also $x = \frac{18 \cdot 3}{600}$.

Da dieses keine ganze Zahl ist; so könnte man die Thaler in Groschen ausdrücken, da ist $n = 24$: denn die Verwandlung der C in Hb und umgekehrt gilt auch von andern Dingen.

$$\begin{aligned} \text{Daher ist der Preis von } 3\text{Hb} &= \frac{18 \cdot 3}{600} \text{ Thaler} \\ &= \frac{18 \cdot 3 \cdot 24}{600} \text{ Groschen} = \frac{18 \cdot 3 \cdot 24 \cdot 12}{600} \text{ Pfennige.} \end{aligned}$$

II) *Vergleichung und Reduction der Maafse.*

S und s seyn verschiedene Arten von Maafsen, z. B. rheinif. Gulden und fränkif. Gulden, oder Nürnberger Werkschuhe und rheinländif. Schuhe u. f. w.

Ferner

Ferner sey $S:s = m:n$ oder, $nS = ms$ und man verlangt aS in s auszudrücken; so ist

$$\begin{aligned} S:s &= m:n \\ aS:as &= m:n \quad (\S. 56 \text{ Nr. 6 Zuf. 3.}) \\ n:m &= as:aS \quad (\S. 56 \text{ Nr. 4.}) \end{aligned}$$

Folglich $a.S = \frac{m.as}{n} = \frac{m.a}{n}.s$; oder aS sind $\frac{m.a}{n}.s$. d. i. die Anzahl der s , die den aS gleich ist, ist das 4te Proportionalglied zu n , m und a . §. 56. N. 1. Zuf.

Nach der gewöhnlichen Rechnungsweise setzt man daher mit Recht die Frage so an:

nS geben ms , wie viel geben aS ?

Die Antwort wird durch die Regel de Tri bestimmt, die immer das 4te Proportionalglied darstellt.

Beispiel.

$$\begin{aligned} S &= \text{fränkische Gulden} \\ s &= \text{rheinländische Gulden} \\ m &= 5 \quad \text{und} \quad n = 4. \end{aligned}$$

Man soll 80 fränkische Gulden in Rheinländische ausdrücken.

$$\text{Sie sind} = \frac{5 \cdot 80}{4} \text{ rheinische Gulden.}$$

An-

Anmerkung.

Es wird vorausgesetzt, daß man mit den gewöhnlichen Rechnungen so weit bekannt ist, daß man schon mehrere Regel de Tri Exempel gerechnet hat. Gegenwärtiger Vortrag dient, die Gründe des gewöhnlichen Verfahrens einleuchtend zu machen. Daß übrigens die Regel de Tri überall statt finden könne, wo eine geometrische Proportion statt findet und aus 3 Gliedern das vierte gesucht wird, versteht sich von selbst.

§. 58.

Kettenrechnung.

$$\text{Wenn } a : b = m : n$$

$$b : c = p : q$$

$$c : d = r : t$$

$$\text{So ist } a : d = mpr : nqt.$$

Denn das aus allen dreien zusammengesetzte Verhältniß ist $abc : bcd = mpr : nqt$. Dividirt man die 2 ersten Glieder mit bc ; so erhält man $a : d = mpr : nqt$.

Vermöge dieses Sazzes kann man Dinge mit einander vergleichen, deren Verhältniß zu einander nicht unmittelbar gegeben ist, sondern erst durch Zwischenverhältnisse gefunden wird. Stellen die großen Buchstaben solche Dinge vor, die kleinen aber Zahlen; und finden unter ihnen folgende Verhältnisse statt:

$$A : B = m : n$$

$$B : C = p : q$$

$$C : D = r : t$$

so ist auch $A : D = mpr : nqt$.

Die Operation wird gewöhnlich gebraucht um eine gegebene Anzahl a der Sorte A in der Sorte D auszudrücken.

Sollte man nämlich a Stücke der Sorte A in der Sorte D ausdrücken; so fände sich aus voriger Proportion vermöge §. 57. II $a A = \frac{mpr \cdot a}{nqt} \cdot D$

Man sieht, daß die sämtlichen 4ten Glieder n, q, t den Divisor geben und daß man die 3ten Glieder nur mit a zu multipliciren habe, um den Dividend mpa zu bekommen.

Die Rechnung kann auch auf eine andere Weise angeordnet werden. Aus der ersten Proportion folgen die 2 gleichen Producte.

$$nA = mB$$

$$\text{aus der 2ten } qB = pC$$

$$\text{aus der 3ten } tC = rD$$

$$\text{aus der letzten } nqtA = mprD$$

Hier bildet ein Product der ersten Zahlenreihe (nqt) den Divisor und ein Product aus der 2ten Zahlenreihe nebst a ($ampr$) den Dividend.

Fol-

Folgendes fällt in die Augen: die Sorte B, die das erste Glied schließt, muß das 2te anfangen: die Sorte C, die das 2te Glied schließt, muß das 3te anfangen, und wenn mehrere Zwischenverhältnisse sind, so immer fort bis an die letzte Sorte.

Beispiel.

20 Laubthaler sollen in Kaiser Gulden ausgedrückt werden, und man wisse, daß der Laubthaler zum Preussischen wie 11:7, der Preussische zum rheinischen Gulden wie 7:4, und der rheinische Gulden zum Kaisergulden wie 5:zu 6 sich verhalte; so hat man folgenden Ansaz

$$\begin{array}{rcl} \text{Laubth. : Preussisch} & = & 11 : 7 \\ \text{Preuss. : Rhein. Guld.} & = & 7 : 4 \\ \text{Rhein. Guld. : Kaiser-Guld.} & = & 6 : 5 \\ & & 20 = a \end{array}$$

Daher sind 20 Laubthaler $= \frac{20 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 11}{7 \cdot 4 \cdot 5}$ Kaiser-Gulden.

Wählt man den zweiten Ansaz; so ist vermöge §. 56 Nr. 1.

$$\begin{array}{rcl} 7 \text{ Laubthaler} & = & 11 \text{ Preussische} \\ 4 \text{ Preussische} & = & 7 \text{ Rhein. Gulden} \\ 5 \text{ Rhein. Guld.} & = & 6 \text{ Kaiser-Gulden} \\ & & 20 = a \end{array}$$

Daher sind 20 Laubthaler $= \frac{11 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 20}{7 \cdot 4 \cdot 5}$ Kaisergulden.

Die

Die gefundene Zahl verwandelt sich, wenn man Zähler und Nenner successive mit einer Zahl (mit 7, und 4) dividirt in folgende $\frac{11 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 20}{7 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{11 \cdot 5 \cdot 20}{4 \cdot 6} = \frac{11 \cdot 5 \cdot 5}{6} = \frac{275}{6} = 45\frac{5}{6}$.

§. 59.

Regula Quinque.

Wenn C eine Ursache bezeichnet und E ihre Wirkung, c eine andere Ursache und e ebenfalls ihre Wirkung; so kann man, wenn vorausgesetzt wird, daß beide Ursachen einerlei Zeit hindurch wirken, folgendes als Grundsatz annehmen

$$\alpha) C : c = E : e$$

Setzt man einerlei wirkende Ursache voraus, und zwar so, daß ihre Wirkung E ist in der Zeit T und e in der Zeit t; so gilt die Proportion

$$\beta) T : t = E : e$$

Hier kann die Aufgabe vorkommen; das Verhältniß E : e zu bestimmen, wenn verschiedene Ursachen C und c in verschiedenen Zeiten T und t wirken.

Die Auflösung ist diese:

Da

Da C in T die Wirkung E hervorbringt; so nehme man anfänglich an, daß c ebenfalls in der Zeit T wirke, diese Wirkung heiße ε ; Dann ist nach den Grundfaz α .

$$\gamma) C : c = E : \varepsilon$$

Dieses ε ist aber nicht einerlei mit e : denn e ist die Wirkung von c in der Zeit t. Da aber ε die Wirkung von dem nämliche c in der Zeit T ist; so hat man nach β die Proportion

$$\delta) T : t = \varepsilon : e.$$

Werden nunmehr γ und δ zusammengesetzt; (§. 56 Nr. 9) so hat man $CT : ct = E\varepsilon : e\varepsilon$, oder $CT : ct = E : e$.

Das heißt, die Wirkungen stehn im zusammengesetzten Verhältnisse der Ursachen und Zeiten (§. 56 Nr. 9 Anmerk.)

Zu f. Aus obiger Proportion folgt die Formel $CTe = ctE$. Bei den arithmetischen Aufgaben, die durch Hülfe derselben gelöst werden können, treten folgende Fälle ein. Denn man sucht entweder

1) Die Wirkung e. Dividirt man die Formel rechts und links mit CT; so erhält man $e = \frac{ctE}{CT}$

2)

2) oder die Ursache c . Zu dieser Absicht erhält man, wenn beide Theile der Formel durch tE dividirt werden, $c = \frac{CTe}{tE}$

3) oder die Zeit t . Durch Division mit cE hat man $t = \frac{CTe}{Ec}$

4) oder es ist $E = e$. Für diesen Fall ist $CT = ct$, und daraus folgt

$$\alpha) c = \frac{CT}{t}$$

$$\beta) t = \frac{CT}{c}$$

Anmerkung.

Diesen letzten Fall hat man die verkehrte Regel de Tri genannt, weil hier Zeiten und Ursachen im gleichen aber verkehrten Verhältnisse stehen, oder $C : c = t : T$.

Beispiel für den ersten Fall.

Wenn man für 8 Pferde auf 2 Meilen 5 Gulden zahlt, wie hoch kommen 20 Pferde auf 7 Meilen weit zu stehen?

Hier ist $C = 8$ $T = 2$ $E = 5$

$c = 20$ $t = 7$ e wird gesucht

$$e = \frac{20 \cdot 7 \cdot 5}{8 \cdot 2} = \frac{5 \cdot 7 \cdot 5}{2 \cdot 2} = \frac{175}{4} = 43\frac{3}{4} \text{ Gulden.}$$

Für

Für den 2ten Fall.

10 Arbeiter machen in 6 Tagen an einem gewissen Bau eine Strecke von 9 Fufs fertig, wie viel Arbeiter braucht man um in Zeit von 15 Tagen eine Strecke von 24 Fufs fertig zu bekommen:

$$C = 10 \quad T = 6 \quad E = 9.$$

$$c \text{ ist unbekannt } t = 15 \quad e = 24.$$

$$c = \frac{10 \cdot 6 \cdot 24}{15 \cdot 9} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 24}{3 \cdot 3} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}.$$

Also 11 Arbeiter, denn 10 sind zu wenig.

Für den 3ten Fall.

Es soll unter den Voraussetzungen des vorigen Beispiels $c = 11$ bekannt seyn, aber t unbekannt; so ist

$$t = \frac{10 \cdot 6 \cdot 24}{11 \cdot 9} = \frac{10 \cdot 6 \cdot 8}{11 \cdot 3} = 14\frac{18}{11}.$$

Für den 4ten Fall.

Es braucht jemand zur Bearbeitung eines Stückes Land, in der Aerndtezeit zum Beispiel, 30 Leute um in 12 Tagen fertig zu werden. Man wünschte nun in 8 Tagen fertig zu seyn, wie viele Leute sind erfordert?

$$c = \frac{12 \cdot 30}{8} = \frac{3 \cdot 30}{2} = 3 \cdot 15 = 45.$$

Anmerkung.

Bei der Anwendung der Formel des vorhergegangenen Zufalles ist zu bemerken, daß T und t nicht grade Zeit bedeuten müsse, es kann auch einen andern mit C und E verbundenen Umstand anzeigen, wie z. B. im ersten Beispiel.

Bei jedem Beispiele muß man überhaupt darauf sehen, ob diejenigen Dinge, die man mit der Benennung CT und E u. f. w. belegt hat, die Bedingungen erfüllen, die den Proportionen α und β zu Anfange von §. 59 zu Grunde liegen. Hätte man beim ersten Exempel die 5 Gulden als Ursache angesehen, warum man 8 Pferde bekommt; so wäre dieses der Proportion β ganz zuwider. Daher sind die 8 Pferde als die Ursache anzusehen, warum 5 Gulden bezahlt werden. Dann finden beide Proportionen α und β statt.

§. 60.

Gesellschafts-Rechnung.

Aufgabe.

Die Zahl S, soll in mehrere Theile, zum Beispiel in 4 Theile v, x, y und z getheilt werden, die sich zu einander verhalten, wie die Zahlen a, b, c und d, d. i. $v : x = a : b$; $x : y = b : c$ u. f. w.

Auf-

Auflösung.

$$v = \frac{aS}{a+b+c+d}$$

$$x = \frac{bS}{a+b+c+d}$$

$$y = \frac{cS}{a+b+c+d}$$

$$z = \frac{dS}{a+b+c+d}.$$

Beweis.

Es ist zweierlei zu beweisen, erstlich dafs die Summe der Werthe von v , x , y und z gleich S ist, und zweitens dafs diese Werthe sich verhalten wie a , b , c und d .

Fürs erste ist die Summe dieser Werthe nach den Regeln der Bruchberechnung $= \frac{aS+bS+cS+dS}{a+b+c+d}$.

Dafs aber dieser Ausdruck $= S$ ist, erhellt, weil $(a+b+c+d) \cdot S = aS+bS+cS+dS$ und weil jeder Quotient richtig ist, der, mit dem Divisor multiplicirt, ein Product giebt, welcher dem Dividenden gleich ist.

Fürs zweite nehme man an, dafs sich $\frac{aS}{a+b+c+d}$ zu $\frac{bS}{a+b+c+d}$ verhalte wie m zu n . Multiplicirt man die beiden ersten Glieder nach §. 56 Nr. 6 Zuf. 3 mit $a+b+c+d$, und dividirt man dieselben mit S (§. 56 Nr. 7

Nr. 7 Zul. 3); so ist $a:b = m:n$. Das Verhältniß $m:n$, das man dem Verhältnisse der Werthe von v und x gleich angenommen hatte, kann kein anderes seyn, als $a:b$. Eben so ist der Beweis für die angegebenen Werthe von x und y , y und z .

Zuf. Setzt man a und v ferner b und $x = 0$; so soll S in 2 Theile y und z getheilt werden, so dafs $y:z = c:d$, da ist nach voriger Auflösung $y = \frac{cS}{c+d}$ und $z = \frac{dS}{c+d}$. Ist nur a und $v = 0$;

so hat man $x = \frac{bS}{b+c+d}$; $y = \frac{cS}{b+c+d}$ und

$z = \frac{dS}{b+c+d}$. Durch die Analogie dieser Ausdrücke sieht man, wie bei 5 und mehrern Theilen zu verfahren sey.

Anwendung dieser Aufgabe.

Diese findet sehr häufig Statt, und wird gewöhnlich die Gesellschaftsregel genannt. Ein paar Beispiele mögen dieses erläutern.

1. Beispiel.

Drei Personen legen einen Fond an, und zwar ist der Beitrag des ersten 400 Thaler, des zweiten 700 und des dritten 500. Nachdem sie einen Gewinn von 5600 damit gemacht haben, wollen sie diesen theilen. Da nun die Theilung nach Verhältniß der Beiträge geschehen muß; so hat man die Aufgabe,

I die

die Zahl 3600 in 3 Theile zu theilen die sich verhalten, wie 700, 400 und 500. Daher ist der Antheil

$$\text{des Ersten} = \frac{3600 \cdot 700}{700 + 400 + 500} = 1575.$$

$$\text{des Zweiten} = \frac{3600 \cdot 400}{1600} = 900$$

$$\text{des Dritten} = \frac{3600 \cdot 500}{1600} = 1125.$$

Die Einlagen verhalten sich auch wie 7, 4 und 5, man hätte also auch diese kleinern Zahlen in der Rechnung gebrauchen können.

2. Beispiel.

Es hat jemand ein Geschäft unternommen, zu dem er sogleich 800 Thaler angelegt hat. Nach Verlauf von 10 Monathen tritt noch ein Zweiter dem Geschäfte bei, mit dem Beitrag von 1000 Thalern. Nun soll nach Verlauf zweier Jahre ein Gewinn von 900 Thaler unter beide getheilt werden.

Als Vorbereitung zu dieser Auflösung nenne man den Antheil des ersten E und den des zweiten e. Dieser Antheil nun ist offenbar eine Wirkung von der Einlage als Ursache (C) mit der zugleich noch eine Zeit (T) in Verbindung steht; bei e ist es eben so.

Da nun nach §. 59 $CT : ct = E : e$; so müssen auch hier die Anthteile am Gewinn im zusammengesetzten Verhältnisse der Beiträge und der Zeiten stehn.

Des

Des Ersten Beytrag = 800 war 24 Monathe angelegt, der des Zweiten 1000 aber 14 Monathe: daher ist das Verhältniß ihrer Antheile am Gewinn wie $800 \cdot 24 : 1000 \cdot 14$; Man hat also die Aufgabe: 900 Thaler in 2 Theile zu theilen, die sich verhalten wie $800 \cdot 24 : 1000 \cdot 14$.

Des ersten Antheil also ist $\frac{900 \cdot 800 \cdot 24}{800 \cdot 24 + 14000} = 520 \frac{40}{83}$

Des zweiten $\frac{900 \cdot 1000 \cdot 14}{33200} = 379 \frac{43}{83}$

Bei allen solchen Fällen also ist der Gewinn nach dem Verhältniß der Producte der Beiträge und der Zeiten zu theilen.

§. 61.

Geometrische Progression.

Aufgabe.

Sie entsteht genau so wie die arithmetische, nur mit dem Unterschiede, daß geometrische Verhältnisse zu Grunde liegen. Heißt der Exponent e , so ist der allgemeine Ausdruck der geometrischen Progression dieser:

$$a; ae; ae^2; ae^3; ae^4; \text{ u. f. w.}$$

Sieht man hier auf die Zahl eines Gliedes und auf die Potenz von e ; so sieht man, daß der Exponent von der Potenz von e um eins weniger ist, als

I 2

die

Jetzt hat man linker Hand des Gleichheitszeichens die Summe einer Progression die ganz dieselbe ist wie bei $\textcircled{P}$, deren Summe $\equiv \Sigma$ gesetzt worden war. Setzt man daher auch hier dieses Σ statt der einzelnen Glieder bei $\textcircled{P}$; so hat man

$$\begin{array}{l} \Sigma \equiv e\Sigma + 1 - e^n \\ e^n \equiv \qquad \qquad e^n \text{ addirt} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{giebt } e^n + \Sigma \equiv e\Sigma + 1 \\ \qquad \qquad \qquad 1 \equiv \qquad \qquad \qquad 1 \text{ abgezogen} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{bleibt } e^n + \Sigma - 1 \equiv e\Sigma \\ \qquad \qquad \qquad \Sigma \equiv \Sigma \text{ abgezogen} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{bleibt } e^n - 1 \equiv e\Sigma - \Sigma \equiv (e - 1) \Sigma \\ \text{dividirt mit } e - 1 \qquad \qquad \qquad \equiv e - 1 \end{array}$$

$$\text{giebt } \frac{e^n - 1}{e - 1} \equiv \Sigma$$

Diese jetzt gefundene Formel zeigt, wie man die Summe einer Progression findet, deren erstes Glied 1 ist. Will man S haben, d. i. die Summe einer Progression, deren erstes Glied a ist; so setze man $\frac{S}{a}$ für Σ wie bei $\textcircled{P}$ angenommen wurde; so hat man

$$\begin{array}{l} \frac{e^n - 1}{e - 1} \equiv \frac{S}{a} \\ \text{mit } a \qquad \qquad \qquad \equiv a \text{ multiplicirt} \\ \text{giebt } \frac{a(e^n - 1)}{e - 1} \equiv S. \end{array}$$

Bei-

Beispiel.

Man sucht die Summe einer Progression, deren erstes Glied 3, der Exponent 2, und die Anzahl der Glieder 10 ist.

$$\begin{aligned} S \text{ ist} &= \frac{3 \cdot (2^{10} - 1)}{2 - 1} \\ &= \frac{3 \cdot (512 - 1)}{1} \\ &= 1535 \end{aligned}$$

Von den Logarithmen.

§. 62.

Aufgabe.

Wenn eine geometrische Progression N, deren erstes Glied $= 1 = e^0$ ist, unter eine arithmetische L geschrieben wird, die arithmetische aber zum ersten Glied 0 und zur Differenz 1 hat; so sind die einzelnen Glieder der arithmetischen Progression die Logarithmen der darunter stehenden Glieder der geometrischen. Folgende Figur wird es deutlich machen:

L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N	e^0	e^1	e^2	e^3	e^4	e^5	e^6	e^7	e^8	e^9

Hier ist nämlich, was auch e bedeuten mag, 0 der Logarithmus von e^0 oder 1. Der Logarithmus von e^1 ist 1; von e^2 ist er 2 u. s. w.

Dieses

Dieses wird der Kürze wegen so geschrieben:

$$0 \equiv \log. 1 \text{ oder } l. 1.$$

$$1 \equiv l. e^1$$

$$2 \equiv l. e^2$$

$$3 \equiv l. e^3$$

$$n \equiv l. e^n$$

Das beigeschriebene l bezeichnet also hier keinen Factor. Eine flüchtige Uebersicht dieses Schema lehrt, dals der Logarithme immer dem Exponenten der Potenz von e gleich ist, auf die das zugehörige Glied der geometrischen Progression erhoben ist. Ist daher $e^n \equiv a$; so ist $n \equiv l. a$. Für $e^m \equiv b$ ist $m \equiv l. b$.

Setzt man $e \equiv 2$; so hat man folgende zwei Progressionen

L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512

und daraus $0 \equiv l. 1$; $1 \equiv l. 2$; $2 \equiv l. 4$; $3 \equiv l. 8$ u. f. w.

Man kann überhaupt verschiedene Werthe für e substituiren, dieses giebt verschiedene logarithmische Systeme.

Anmerkung.

Das griechische Wort Logos heist Verhältniß und Arithmos Zahl. Der Name rührt daher, weil der
Lo-

Logarithme das Vielfache des Verhältnisses von $1:e$ zählt. Es ist nämlich e^5 der Exponent des fünffachen Verhältnisses von $1:e$, oder des Verhältnisses von $1:a^5$; und 5 ist $= 1 a^5$.

§. 63.

Eigenschaften der Logarithmen.

Es sey $e^a = A$ und $e^b = B$; so dafs also $a = 1A$ und $b = 1B$; $c = 1C$ u. f. w.

Dann finden folgende Sätze statt:

I) $a + b = 1A.B.$

Beweis.

$e^a . e^b = AB$. Nach §. 40 ist aber $e^a . e^b = e^{a+b}$. Daher ist $e^{a+b} = A.B$. Folglich ist $a+b$, welches $= 1e^{a+b}$, auch $= 1A.B$.

Beispiel.

Für $e = 2$ ist $2 = 14$ und $5 = 132$. Daher ist $2+5$ oder $7 = 1.4.32$.

Aus der Figur sieht man, dafs $7 = 1128$. Ohne also 4 mit 32 zu multipliciren wüfte man, dafs das Product 128 seyn müsse

II) $a - b = 1(A:B).$

Denn

Denn $e^a : e^b = A : B$. Nach §. 41 ist aber $e^a : e^b = e^{a-b}$. Daher ist $e^{a-b} = A : B$, oder $a - b = 1 (A : B)$.

Beispiel.

$9 = 1 \ 5^{12}$; $5 = 1 \ 3^2$; daher ist $9 - 5$ oder $4 = 1 \ \frac{5^{12}}{3^2}$. Da nun nach dem Schema $4 = 1 \ 16$; so ist $\frac{5^{12}}{3^2} = 16$. Man findet also diesen Quotienten ohne zu dividiren.

Zusatz. Wenn $A : B$ ein eigentlicher Bruch, d. i. A kleiner als B ist; so ist auch a kleiner als b , und $a - b$ ist negativ. Die Logarithmen der Brüche sind daher negativ. Dieses geht auch aus folgender Betrachtung hervor. $a^{-b} =$
(§. 41) $\frac{1}{a^b} = \frac{1}{B}$. Da nun $0 = 1 \ 1$ und $b = 1 \ B$; so ist $0 - b$ oder $-b = 1 \ \frac{1}{B}$.

Beispiel.

$$1 \ \frac{64}{256} = 6 - 8 = -2.$$

Nach der leztern Betrachtung ist -2 der Logarithme eines Bruches der zum Zähler 1, zum Nenner aber eine Zahl hat, deren Logarithmus $+2$ ist. Nun ist $2 = 1 \ 4$; also $-2 = 1 \ \frac{1}{4}$. Daher auch $\frac{64}{256} = \frac{1}{4}$.
III)

$$\text{III) } na = 1A^n.$$

Denn $(e^a)^n = A^n$. Nach §. 40 ist $(e^a)^n = e^{na}$. Weil also $A^n = e^{an}$; so ist $an = 1A^n$.

Beispiele.

1) $1\ 16 = 4$. Daher ist $2 \cdot 4$ oder $8 = 1\ 16^2$. Nach dem Schema ist $8 = 1\ 256$; also ist $16^2 = 256$.

2) $2 = 14$. Daher ist $3 \cdot 2$ oder $6 = 14^3$. Nach dem Schema ist $6 = 164$, folglich ist $4^3 = 64$.

Man findet also die Logarithmen der 2ten, 3ten, 4ten u. s. w. Potenz, wenn man den Logarithmus der Wurzel mit 2, 3, 4 u. s. w. multiplicirt.

$$\text{IV) } \frac{a}{n} = 1 \sqrt[n]{A}.$$

Denn $\sqrt[n]{e^a} = \sqrt[n]{A}$. Nach §. 40 ist $\sqrt[n]{e^a} = e^{\frac{a}{n}}$. Da nun also $e^{\frac{a}{n}} = \sqrt[n]{A}$; so ist $\frac{a}{n} = 1 \sqrt[n]{A}$.

Beispiel.

Da $8 = 1\ 256$; so ist $\frac{8}{2}$ oder $4 = 1 \sqrt{256}$. Nach dem Schema ist $4 = 1\ 16$, also ist $\sqrt{256} = 16$.

So findet man durch bloßes Dividiren des Logarithmen durch 2, 3, 4 u. s. w. die Logarithmen der Wurzel des 2ten 3ten 4ten Grades.

§. 64.

Einrichtung der Logarithmen-Tafeln.

Die Rechnungen, wobei Multipliciren, Dividiren, Erhebung auf Potenzen und Ausziehungen der Wurzeln vorkommen, können, wie man aus dem vorigen § sieht, sehr erleichtert werden, wenn man Tafeln hat, worinnen man den, einer jeden Zahl zugehörigen, Logarithmen und umgekehrt die, einem jeden Logarithmen zugehörige, Zahl aufschlagen kann.

Am Ende kommen Tafeln für die *gemeinen* Logarithmen nebst der Anweisung zum Aufschlagen vor. Ihre wesentliche Einrichtung soll hier erklärt werden.

Bei den *gemeinen* Logarithmen liegt ein e (§. 62) zu Grunde, welches $= 10$ ist. Daher gehören zu folgenden Zahlen die dabei stehenden Logarithmen.

Zahlen	Logarithmen
1	0
10	1
100	2
1000	3
10000	4

Unter den Zahlen aber fehlen die zwischen 1 und 10 gelegenen, über 10 fehlen alle von 11 bis 99. Ferner fehlen die Zahlen 101 bis 999 u. f. w.

Ein-

Einleuchtend aber ist, daß die Logarithmen der Zahlen von 2 bis 9 größer sind als 0 und kleiner als 1, so auch daß die Logarithmen der Zahlen 11 — 99 größer sind als 1 und kleiner als 2, daß die Logarithmen der Zahlen 101 — 999 größer als 2 und kleiner als 3.

Von einer Zahl, wie 2, 3.....9 würde der Logarithmus folgende Gestalt haben $0 + x$.

Für Zahlen wie 11, 12.....99 aber $1 + y$.

Für Zahlen wie 101, 102.....999 $2 + z$ u. s. w.

Nur müßte x , y und z kleiner seyn als 1.

Die Größen könnten daher entweder eigentliche Brüche oder Irrationalgrößen (§. 47 Zuf.) seyn. Welches nun von beiden der Fall immerhin seyn mag; so wird sich der Werth von x , y und z , wenn er bekannt ist, in Decimalbrüchen, wo nicht genau, doch wenigstens so weit, als man will, genähert, vorstellen lassen. Man kann sich also unter x , y und z Decimalbrüche vorstellen. Dann hat die Tafel folgende Gestalt.

Zahlen

Zahlen	Logarithmen
1	0
2 } : } 9 }	0, + x
10	1
11 } : } 99 }	1, + y
100	2
101 } 999 }	2, + z
1000	3

Da die bei weitem grössere Anzahl der Logarithmen aus ganzen Zahlen und einem Decimalbruche besteht, so gab dieses Veranlassung die ganzen Zahlen mit dem eigenen Namen *Kennziffer* (Characteristica) und den Decimal den *Anhang* (Mantissa) zu benennen.

Die Zahlen, die sich unter der Form 10^n darstellen lassen, haben Logarithmen, deren Kennziffer $= n$ und der Anhang $= 0$ ist.

Der 1ziffrigen Zahlen Logarithmen haben zur Kennziffer

Der 2ziffrigen - - - - - 1

Der 3ziffrigen - - - - - 2

Der nziffrigen - - - - - $n - 1$.

Da-

Dabei wird aber vorausgesetzt, daß die niedrigste Ziffer der Zahl von der Ordnung 0 sey.

Ist r eine $(m+1)$ ziffrige Zahl, die höchste Ziffer also von der Ordnung m ; so hat ihr Logarithme die Kennziffer m und ist überhaupt von der Gestalt $m+y$, wo y den Anhang bezeichnet.

Da der Logarithmus von 10, 1 ist; so ist $l \frac{r}{10} = m+y-1$ (§. 63).

Da nun m eine ganze Zahl ist, y aber nicht; so könnte man 1 unmittelbar von m abziehen und $l \frac{r}{10}$ hätte $(m-1)$ zur Kennziffer.

$\frac{r}{10}$ bestünde zwar noch immer aus $(m+1)$ Ziffern die höchste wäre aber nun von der Ordnung $(m-1)$ die niedrigste von der Ordnung -1 .

Da $l 100 = 2$; so ist $l \frac{r}{100} = m+y-2 = (m-2)+y$, wo $(m-2)$ die Kennziffer vorstellt. Die höchste Ziffer von $\frac{r}{100}$ ist von der Ordnung $m-2$, die niedrigste von der -2 ten.

Der $l 10^n = n$; daher ist $l \frac{r}{10^n} = (m-n)+y$.

Die

Die höchste Ziffer aber von $\frac{r}{10^n}$ ist von der m -nten Ordnung, die niedrigste von der $-$ nten.

Man könnte sich n größer gedenken als m ; dann wäre selbst die höchste Stelle von $\frac{r}{10^n}$ von einer negativen Ordnung, und des Logarithmen Kennziffer negativ, der Anhang aber positiv.

Im Ganzen erhellt hieraus ein für den Gebrauch der *gemeinen* Logarithmen wichtiger Satz, daß des Logarithmen Kennziffer der Ordnungszahl der höchsten Ziffer seiner zugehörigen Zahl gleich sey. Ist nämlich einer Zahl höchste Ziffer von der $\pm$ nten Ordnung; so ist des Logarithmen Kennziffer $\pm n$.

Dieses wird durch ein vollständig erläutertes Beispiel vollends deutlich werden.

r sey $= 768$, also $m = 2$. Des Logarithmen Kennziffer ist also 2. Aus den Logarithmentafeln findet man $\lg 768 = 2,8853612$; daher ist $y = 0,8853612$.

Zieht man von $2,8853612$ den $\lg 10 = 1$ ab; so hat man $\lg \frac{768}{10}$ oder $\lg 76,8 = 2,8853612 - 1 = 1,8853612$.

Zieht man aber $\lg 100$ von $\lg 768$ ab, so hat man eben so $\lg \frac{768}{100}$ oder $\lg 7,68 = 2,8853612 - 2 = 0,8853612$.

Zieht

Zieht man aber 1 1000 von 1 768 ab; so erhält man $1 \frac{768}{1000}$ oder $1\,0,768 = 2,8853612 - 5$.

Da hier 3 gröfser ist als die andere Zahl, so müfste man eigentlich nach den Regeln der Rechnung mit entgegengesetzten Gröfsen 2,8853612 von 3 abziehen, der Rest wäre dann $-0,1146388$. Dieser gänzlich negative Logarithme gehörte also zur Zahl 0,768.

Man kann aber auch -3 blos von der Kennziffer 2 abziehen und das ganze y oder den Anhang 0,8853612 unverändert lassen, dann ist der Logarithme von $0,768 = -1 + 0,8853612$, welcher mit obigen ganz negativen ganz einerlei ist.

Gewöhnlich setzt man die negative Kennziffer hinter den Anhang, und so ist $1\,0,768 = 0,8853612 - 1$.

Eben so ist $1\,0,0768 = 1768 - 110000 = 2,8853612 - 4 = 0,8853612 - 2$.

Diesen negativen Theil bringt man gewöhnlich auf 10. Statt $0 - 1$ nämlich kann man $9 - 10$ und statt $0 - 2$, $8 - 10$ schreiben. Daraus geht folgende Tabelle hervor.

Zahlen	Logarithmen	Zahlen	Log.
768	2.8853612	0,0768	8.8853612 - 10
76,8	1.8853612	0,00768	7.8853612 - 10
7,68	0.8853612	0,000768	6.8853612 - 10
0,768	9.8853612 - 10	0,0000768	5.8853612 - 10.

Rechnung mit zusammengesetzten Zinsen oder Zinsen von Zinsen.

Die Anwendung der Logarithmen gewährt bei allen Rechnungen, wo Multiplicationen, Divisionen und Potenzen gebraucht werden, große Vortheile, z. B. in der Regel de Tri, Regula Quinque und bei der Kettenregel. Ihr Nuzzen fällt aber vorzüglich bei der Rechnung mit zusammengesetzten Zinsen in die Augen.

Wenn die Zinsen jährlich zum Capital geschlagen und also im folgenden Jahre ebenfalls Zins mittragen; so nennt man dieses zusammengesetzte Zins. Die Größe der Verzinsung kann immer durch einen Bruch ausgedrückt werden, welcher anzeigt, der wievielte Theil die Zinsen vom Capital sind, oder den wievielten Theil eines Thalers die Interessen von einem Thaler betragen. Bei 4 Procent ist dieser Bruch $\frac{1}{25}$ oder 0,04. Die Zinsen sind nämlich der 25te Theil des Kapitals, oder von einem Thaler betragen die Zinsen $\frac{1}{25}$ Thaler. So ist dieser Bruch für 5 Procent $= \frac{1}{20} = 0,05$, für 6 Procent $= 0,06$, für $4\frac{1}{2}$ Procent $= 0,045$ u. f. w.

Dieser Bruch nun heiße r.

Ist C das Capital; so sind die jährlichen Zinsen $= Cr$. Capital und Zinsen zusammen $= C + Cr = (1+r) C$.

K

Setzt

Setzt man für $1+r$ den Buchstaben u , so ist also Cu das Capital sammt den Interessen im ersten Jahr. Sieht man $Cu = D$ nun für ein Capital an, das auf dieselbe Art verzinst wird; so sind im 2ten Jahr Capital und Interessen $= Du = Cu^2$. Heißt man dieses E ; so sind im dritten Jahr Capital und Interessen $= Eu = Cu^3$. Also aus C entsteht nach

1 Jahr	Cu
2 Jahren	Cu^2
3 Jahren	Cu^3 u. s. w.

allgemein nach n Jahren Cu^n .

Nennt man den Ertrag nach n Jahren S ; So ist also

$$\S) S = Cu^n \text{ oder } lS = lC + n \cdot \log. u. (\S. 63)$$

Dividirt man beide Seiten mit u^n ; so hat man

$$\P) \frac{S}{u^n} = C \text{ oder } lC = lS - n \cdot lu.$$

Dividirt man hingegen in $\S$ auf beiden Seiten mit C und zieht die Wurzel des n ten Grades aus; so erhält man

$$\dagger) u = \sqrt[n]{\frac{S}{C}} \text{ oder } lu = \frac{lS - lC}{n}.$$

Dividirt man in $\S$ beide Seiten mit C ; so hat man

$$u^n = \frac{S}{C} \text{ also auch}$$

$l u^n$

$$1 u^n = 1 \frac{S}{C} \text{ oder nach §. 63 III) und II)}$$

$n 1 u = 1 S - 1 C$ und wenn man mit $1 u$ dividirt

$$\S) n = \frac{1 S - 1 C}{1 u}.$$

Diese 4 Formeln lösen eben so viele Aufgaben auf, die am leichtesten durch einige Beispiele deutlich werden.

1. Beispiel.

4000 Thaler werden zu 5 Procent verzinst, wie groß ist der Ertrag nach 12 Jahren?

Hier ist $C = 4000$, $r = 0,05$ folglich $u = 1,05$
 $n = 12$ und S wird nach $\S$ gesucht.

$$1 \ 1,05 \equiv 0.0211893$$

12

$$0423786$$

$$211893$$

$$12 \ 1 \ 1,05 \equiv 0.2542716$$

$$1 \ 4000 \equiv 3.6020600$$

$$1 \ S \equiv 3.8563316$$

$$S \text{ ist also} \equiv 7183,4.$$

2. Beispiel.

Wenn ein Capital 4000 in 12 Jahren 7185 tragen sollte, mit welchen Procenten müßte es verzinst werden. Man sucht nach $\S$ u

K 2

1 7183

$$\begin{array}{r} 1\,7183 \\ 1\,4000 \\ \hline \text{IS} - \text{IC} = 0.2542459 \end{array}$$

$$\frac{\text{IS} - \text{IC}}{12} = 12) \begin{array}{r} 0.2542459 \\ 24 \\ \hline 14 \\ 12 \\ \hline 22 \\ 104 \\ 96 \\ \hline 85 \\ 19 \end{array} \Bigg| = 0.0201871$$

Also $\ln = 0.0211871$ und $u = 1,05$; daher ist $r = 0,05$ oder die Procente sind 5.

3. Beispiel.

Wie lange dauerts, bis das Capital 8000, welches zu $4\frac{1}{2}$ Procent angelegt ist, zu 20000 anwächst? Es wird nach $\S$ n gesucht

$$\begin{array}{r} \text{IS} = 4.3010300 \\ \text{IC} = 3.9030900 \\ \hline \text{IS} - \text{IC} = 0.3979400 \end{array}$$

Hier ist $u = 1,045$ und dessen Logarithme ist $= 0.0191163$. Wird mit diesem der vorige $\text{IS} - \text{IC}$ dividiert; so erhält man $n = 20,8$ oder beinahe 21 Jahre.

§. 66.

Aufgabe.

Diese Aufgaben werden zusammengesetzter, wenn jährlich eine gewisse Summe noch zum Capital gelegt, oder davon weggenommen wird. Man nehme zuerst das erstere an und die dazu gelegte Gröfse sei b ; so hat man

$$\text{nach 1 Jahr } S = Cu + b = D$$

$$\begin{aligned} \text{nach 2 Jahren } S &= Du + b = Cu^2 + \\ &\quad bu + b = E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{nach 3 Jahren } S &= Eu + b = Cu^3 + bu^2 \\ &\quad + bu + b \end{aligned}$$

$$\text{nach 4 Jahren } S = Cu^4 + bu^3 + bu^2 + bu + b.$$

$$\text{nach } n \text{ Jahren } S = Cu^n + bu^{n-1} + \dots + bu + b$$

Der Ertrag nach n Jahren besteht daher aus 2 Theilen 1) aus Cu^n

2) aus einer geometrischen Progression, von n Gliedern, deren erstes Glied $= b$ und der Exponent u .

Die Summe derselben ist nach §. 61 $= \frac{b.(u^n - 1)}{u - 1}$;

Daher ist der Ertrag nach n Jahren oder $S = Cu^n +$

$$\frac{b.(u^n - 1)}{u - 1}.$$

Wenn

Wenn jährlich etwas weggenommen wird; so darf man sich nur b negativ gedenken. Es sei daher

$$b = -\beta; \text{ so ist } S = Cu^n - \frac{\beta.(u^n - 1)}{u - 1}.$$

1. Beispiel.

Wenn zu 40000 Fl. die zu 4 Procent angelegt sind, noch jährlich 100 Fl. hinzugelegt werden; wie groß ist das Capital nach 12 Jahren?

$$C = 4000$$

$$u = 1,04$$

$$b = 100$$

$$n = 12.$$

$$lu = 0.0170333$$

12

$$\underline{340666}$$

$$170333$$

$$12 lu = 0.2043996$$

$$1C = 3.6020600$$

$$\underline{1. Cu^n = 3.8064596}$$

Daher Cu^n oder der erste Theil von $S = 6404,1$.
Weil $lu^{12} = 0.2043996$; so ist $u^{12} = 1,601$ und $u^n - 1 = 0,601$.

$$\text{Also } \frac{(u^n - 1)b}{u - 1} = \frac{0,601 \cdot 100}{0,04} = \frac{60,1}{0,04} = 1502,5$$

= dem 2ten Theil von S .

In

In 12 Jahren ist daher das Capital zu $6404,1 + 1502,5 = 7906,6$ angewachsen.

2. *Beispiel.*

Jemand lebt von seinem Vermögen, das aus 12000 Fl. besteht, und zu 5 Procent angelegt ist; jährlich verzehrt er 655 Fl., wie viel ist nach 20 Jahren noch übrig?

Hier ist $b = -655$ oder $\beta = 655$.

$$lu = 0.0211893$$

20

$$lu^n = 0.4237860 = \frac{1}{2}$$

$$lC = 4.0791812$$

$$lCu^n = 4.5029672$$

$$\text{Oder } Cu^n = 31839$$

Nach $\frac{1}{2}$ ist $u^n = 2,6533$ also $u^n - 1 = 1,6533$.

$$1(u^n - 1) = 0.2183517$$

$$1\beta = 2.8162413$$

$$3.0345930$$

$$1(u - 1) = 0.6989700 - 2$$

$$2.3356230 + 2$$

oder

$$4.3356230$$

$$\text{Daher ist } \frac{\beta(u^n - 1)}{u - 1} = 21658.$$

$$\text{Also ist } S = 31839 - 21658 = 10181.$$

§. 67.

Wenn n gesucht wird, müßte man auf folgende Art verfahren. Man gebe zuerst der Formel des vorigen § die Gestalt.

$$\begin{array}{l}
 S = Cu^n + \frac{b}{u-1} (u^n - 1) \\
 \text{mit } C = C \quad \text{dividirt} \\
 \hline
 \text{giebt } \frac{S}{C} = u^n + \frac{b}{C(u-1)} \cdot (u^n - 1) \\
 \text{oder } \frac{S}{C} = u^n + \frac{b}{C(u-1)} u^n - \frac{b}{C(u-1)} \\
 \frac{b}{C(u-1)} = \frac{b}{C(u-1)} \\
 \text{addirt.}
 \end{array}$$

$$\frac{S}{C} + \frac{b}{C(u-1)} = u^n + \frac{b}{C(u-1)} \cdot u^n.$$

Bringt man auf der linken Seite alles auf den Nenner $C(u-1)$ und addirt man nach der Rechnung mit Brüchen, so bekommt man

$$\begin{aligned}
 \frac{S(u-1) + b}{C(u-1)} &= u^n + \frac{b}{C(u-1)} \cdot u^n \\
 &= \left(1 + \frac{b}{C(u-1)} \right) u^n \\
 &= \frac{C(u-1) + b}{C(u-1)} \cdot u^n
 \end{aligned}$$

Divi-

Dividirt man nun beide Seiten mit $\frac{C(u-1)+b}{C(u-1)}$;

so erhält man

$$\frac{S(u-1)+b}{C(u-1)+b} = u^n.$$

Was linker Hand steht nenne man einstweilen G;

so dafs also

$$G = u^n$$

$$lG = lu^n = n lu$$

$$lG = n$$

$$\frac{n}{lu}$$

Da nun $lG = l[S(u-1)+b] = l[C(u-1)+b]$;
so ist

$$n = \frac{l[S(u-1)+b] - l[C(u-1)+b]}{lu}.$$

Auch hier kann $b = -\beta$ seyn oder eine Wegnahme bedeuten: aber G muß immer positiv bleiben, wenn die Aufgabe in den Gränzen der Möglichkeit liegen soll.

Statt $u-1$ kann r gesetzt werden; so sind alle Ausdrücke bequemer zu übersehen.

1. Beispiel.

Es sind 11000 Fl. zu 4 Procent angelegt, jährlich legt man noch 120 Fl. dazu, wie lange dauerts, bis das Capital noch einmal so groß wird.

$$S(u-1)+b$$

$$S(u-1)+b = 22000 \cdot 0,04 + 120 = 1000$$

$$C(u-1)+b = 11000 \cdot 0,04 + 120 = 560$$

$$\text{Daher } lG = 11000 - 1560 = 0,2518120$$

$$lu = 0,0170333$$

$$\text{Und } \frac{0,2518120}{0,0170333} = 14,78 \text{ oder } n \text{ ist beinahe } 15 \text{ Jahre.}$$

2. Beispiel.

Von dem Capital 12000 Fl., welches zu 4 Procent angelegt ist, werden jährlich 550 Fl. weggenommen, wenn ist nichts mehr da?

$$\text{Weil } S = 0 \text{ und } b = -\beta = -550.$$

$$\text{so ist } S(u-1)+b = -\beta = -550$$

$$\text{und } C(u-1)+b = 12000 \cdot 0,04 - 550 = -70.$$

$$\text{Daher } G = \frac{-550}{-70} = \frac{+550}{+70} = \frac{55}{7}$$

$$\text{Und } lG = 155 - 17.$$

$$155 = 1.7403627$$

$$17 = 0.8450980$$

$$lG = 0.8952647$$

$$lu = \frac{0,8952647}{0,0170333} = 52,56 = n.$$

§. 68.

Wenn man b suchte; so darf man nur mit der Formel des 66. § folgende Veränderungen vornehmen.

$$S = Cu^n + b \frac{u^n - 1}{u - 1}$$

$$Cu^n = Cu^n \quad \text{abgezogen}$$

$$\text{Bleibt } S - Cu^n = b \cdot \frac{u^n - 1}{u - 1}$$

$$\text{mit } \frac{u^n - 1}{u - 1} = \frac{u^n - 1}{u - 1} \text{ dividirt}$$

$$\text{kommt } \frac{(S - Cu^n) \cdot (u - 1)}{u^n - 1} = b$$

Wenn b eine Wegnahme bedeutet; so ist

$$\frac{(S - Cu^n) \cdot (u - 1)}{u^n - 1} = -\beta$$

$$\text{oder } -\frac{(S - Cu^n) \cdot (u - 1)}{u^n - 1} = \beta.$$

Um das, was linker Hand steht, negativ zu machen, brauchte man nur den Zähler negativ zu machen. Dieses geschieht, indem man einen Factor des Zählers negativ macht. $-(S - Cu^n)$ ist aber $= Cu^n - S$.

$$\text{Daher ist } \frac{(Cu^n - S) (u - 1)}{u^n - 1} = \beta.$$

1. Bei-

1. *Beispiel.*

Es hat jemand 10000 Fl. die zu 5 Procent angelegt sind, wie viel darf er jährlich verzehren, wenn in 10 Jahren nichts mehr übrig seyn soll?

$$1u = 0.0211893$$

10

$$1u^{10} = 0.2118930 = \text{h}$$

$$1C = 4.$$

$$1Cu^{10} = 4.2118930.$$

Weil $S = 0$; so ist auch

$$1(Cu^{10} - S) = 4.2118930$$

$$1(u - 1) = 0.6989700 - 2$$

$$1(Cu^{10} - S)(u - 1) = 2.9108630$$

Nach h ist $u^{10} = 1,6327$ und $u^{10} - 1 = 0,6327$,
 Dessen Logarithm. $= 0.8011978 - 1$
 vom vorigen Log. $= 2.9108630$ abgezogen

gibt den Log. von $\beta = 2.1196652 \dagger 1$

$$\text{Daher } \beta = 1317$$

2. *Beispiel.*

In einem Walde stehen 40000 Klafter Holz. Angenommen, daß von 100 Klaftern jährlich $1\frac{1}{2}$ nachwächst; so kann man fragen, wie viel jährlich geschlagen werden dürfe, damit nicht bloß der Wald gleich groß bleibe, sondern zur Deckung unvorher-

zu-

zufehender Waldschäden alle 100 Jahre 2000 Klafter mehr dastehn; also $S \doteq 42000$.

$$u \doteq 0,015.$$

$$100 \log u \doteq 0.6466000 = \frac{1}{2}$$

$$\log C \doteq 4.6020600$$

$$\log C u^n \doteq 5.2466600$$

$$C u^n \doteq 146766$$

$$S \doteq 42000$$

$$C u^n - S \doteq 104766$$

$$\text{Dessen Logarith.} \doteq 5.0201204$$

$$\log(u-1) \doteq 0.1760913 - 2$$

$$\log(C u^n - S)(u-1) \doteq 3.1962117$$

Nach $\frac{1}{2}$ ist $u^n \doteq 4,432$ also $u^n - 1 \doteq 3,432$.

$$\text{Dessen Logarith.} \doteq 0.5355473$$

$$\text{Vom vorigen} \doteq 3.1962117 \text{ abgezogen}$$

$$\text{giebt } \log \beta \doteq 2.6606644$$

$$\beta \doteq 457,69.$$

Anmerkung.

Die Formeln für C und u zu suchen, kann jetzt für den Anfänger keine Schwierigkeit mehr seyn.

§. 69.

Aufgabe.

Wenn eine Summe C erst nach n Jahren zahlbar wäre; so ist für den Empfänger ihr gegenwärtiger

$$\text{Werth } S = \frac{C}{u^n}.$$

Der Beweis ist aus dem Vorigen klar; denn nach §. 65 ist der Ertrag nach n Jahren von $\frac{C}{u^n}$ wirklich C . S soll hier aber offenbar dasjenige seyn, was in n Jahren zu C anwächst.

Man kann auch den Satz auf folgende Art ableiten: Nach §. 65 ist S der Ertrag von C nach n Jahren und $S = Cu^n$.

Wenn ich nun den baaren Werth von etwas, das erst nach n Jahren $= C$ ist, angeben will; so heist dieses eben so viel als den Ertrag von C nach $-n$ Jahren, d. i. n Jahre zuvor suchen: daher ist, wenn man diesen gegenwärtigen Werth von C, S nennt, nach

$$\text{§. 65 } S = Cu^{-n} = C \cdot \frac{1}{u^n} = \frac{C}{u^n}, \text{ wie vorher.}$$

Beispiel.

Wie viel beträgt der baare Werth von 1000 Fl. die erst in 10 Jahren zahlbar sind, die Interessen zu 5 Procent angenommen.

$$\begin{array}{rcl} 1C & = & 3.00000000 \\ 10\ 1u & = & 0.2118930 \\ \hline 1S & = & 2.7881070 \\ S & = & 613,9 \end{array}$$

§. 70.

Aufgabe.

Es erhält jemand n Jahre nacheinander alle Jahre die Summe A . Wie viel beträgt der gegenwärtige Werth der sämmtlichen A ? u bedeutet das nämliche, wie im Vorigen.

Auflösung.

Der gegenwärtige Werth von A

$$\text{im } n\text{ten Jahr ist} \quad = \quad \frac{A}{u^n} = A \cdot \frac{1}{u^n}$$

$$\text{im } (n-1)\text{ten Jahr} \quad = \quad A \cdot \frac{1}{u^{(n-1)}}$$

$$\text{im } (n-2)\text{ten Jahr} \quad = \quad A \cdot \frac{1}{u^{(n-2)}}$$

$$\text{also auch im ersten Jahr} \quad = \quad A \cdot \frac{1}{u}$$

Der gegenwärtige Werth aller n A , der S heißen möge, ist daher

$$\begin{aligned} S &= A \cdot \frac{1}{u} + A \cdot \frac{1}{u^2} + \dots + A \cdot \frac{1}{u^{(n-1)}} + A \cdot \frac{1}{u^n} \\ &= A \cdot \left(\frac{1}{u}\right)^1 + A \cdot \left(\frac{1}{u}\right)^2 + \dots + A \cdot \left(\frac{1}{u}\right)^{n-1} + A \cdot \left(\frac{1}{u}\right)^n. \end{aligned}$$

Oder

Oder setzt man $\frac{1}{u} = w$; so ist

$$\begin{aligned} S &= Aw + Aw^2 + \dots + Aw^{(n-1)} + Aw^n. \\ &= (A + Aw + \dots + Aw^{(n-2)} + Aw^{n-1}) w. \end{aligned}$$

S ist also ein Product aus zwei Factoren, einer ist w oder $\frac{1}{u}$, der andere ist die Summe einer geometrischen Progression von n Gliedern, deren Erstes Glied $= A$, der Exponent $= w = \frac{1}{u}$.

$$\text{Daher } S = \frac{w \cdot (w^n - 1) A}{w - 1} = \frac{w (1 - w^n) A}{1 - w}.$$

Beispiel.

Es bekommt jemand 12 Jahre nach einander 80 Fl. wie viel bekäme er zu Anfang des ersten Jahres?

$$u \text{ sey } = 1,05 \text{ daher } w = \frac{1}{1,05}.$$

Weil $lu = 0.0211893$ so ist $lw = 9.9788107 - 10$.
Daher ist

$$\begin{aligned} lw^{12} &= 9.7457284 - 10 \\ \text{und } w^{12} &= 0.55684 \\ &\quad 1,00000 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} \hline w^n - 1 & = & 0,44316, \quad l(w^n - 1) = 0.6465606 - 1 \\ & & l \quad w = 0.9788107 - 1 \\ & & l \quad A = 1.9030900 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Aber } w \text{ ist } &= 0,95238 \text{ daher } l(w - 1) = 0.6777894 - 2 \\ &\quad 1 \quad 892,63 = 2.9506719 \end{aligned}$$

An-

Anmerkung.

1) In der Aufgabe ist angenommen, daß der Werth für den Anfang des ersten Jahres gesucht wird, die Zahlungen der einzelnen A aber immer zu Ende jedes Jahrs erfolgen. Es kann nicht schwer fallen, die Vorschrift auch für andere Annahmen passend einzurichten. Erfolgen nämlich die einzelnen Auszahlungen auch zu Anfang des Jahres; so ist der gegenwärtige Werth des ersten $A = A$.

Man hat also nur noch den für die folgenden $(n-1)A$ zu suchen.

Ueberhaupt hat es keine Schwierigkeit, einige andere specielle Aufgaben unter diese allgemeinen Auflösungen zu bringen.

Hieher gehören die Fälle, wo gleiche terminliche Zahlungen auf den gegenwärtigen Werth gebracht werden sollen, und wozu §. 70 die Auflösung bietet.

Aufgaben, die bei der Tilgung einer Schuld, wenn man jährlich etwas abzahlt, vorkommen können, löset §. 66 auf.

Nach eben diesem §. kann man auch die Summe einer jährlichen Rente nach n Jahren angeben. Das Capital und die jährliche Zulage oder b darf man nur gleich setzen. Beide nämlich stellen die Gröfse der jährlichen Rente vor.

D a s N ö t h i g s t e
aus der
A l g e b r a.

§. 1.

Erklärungen.

I) Wenn eine Gröſſe, die theils aus bekannten, theils aus unbekannten Gröſſen beſtehen kann, einer andern Gröſſe gleich geſetzt wird; ſo nennt man den Ausdruck, der dieſe Gleichheit ausſpricht, eine Gleichung.

Die unbekannten Gröſſen pflegt man durch die lezten Buchſtaben des Alphabets, z, y, x u. ſ. w. vorzuſtellen.

Gröſſen, mit denen die unbekannte Gröſſe multiplicirt iſt, heißen *Coefficienten*.

Beispiel.

$$ax + b = x^2.$$

II)

II) Die Gleichungen sind vom ersten, 2ten 3ten und überhaupt vom nten *Grade*, jenachdem die unbekannte Gröfse auf der 1ten, 2ten, 3ten oder nten Potenz vorkommt.

III) Die Gleichungen sind entweder wohlgeordnet oder nicht. Zu einer wohlgeordneten Gleichung aber wird folgendes erfordert:

- 1) Die höchste Potenz der unbekannten Gröfse mufs 1 zum Coefficienten haben.
- 2) Die Glieder müssen nach der Ordnung der Potenzen der unbekannten Gröfse vorkommen; so dafs also das letzte Glied x^0 enthält.
- 3) Alle Glieder müssen auf einer Seite stehen; so dafs auf der 2ten nur 0 vorkommt.

Die Gleichung $x^3 - ax^2 + bx + c = 0$ ist daher wohlgeordnet; aber $3x^3 + ax^2 - bx^4 = x^2 + c$ ist es nicht.

Da man immer wieder eine Gleichung erhält, wenn man beide Seiten der gegebenen Gleichung auf einerlei Art behandelt, d. i. auf beiden Seiten Gleiches addirt, oder subtrahirt, oder beide Seiten mit Gleichen multiplicirt, oder dividirt; so sieht man leicht ein, was man vorzunehmen hätte, um aus einer schlechtgeordneten Gleichung eine wohlgeordnete zu machen. Nimmt man

man die letzte Gleichung zum Beispiel; so finden dabei folgende Operationen statt:

$$\begin{array}{l} -bx^4 + 3x^3 + ax^2 = x^2 + c \text{ wegen III 2.} \\ \text{mit } -b \quad \quad \quad = -b \text{ dividirt.} \end{array}$$

$$x^4 - \frac{3}{b} x^3 - \frac{a}{b} x^2 = -\frac{1}{b} x^2 - \frac{c}{b} \text{ wegen III. 1.}$$

$$+ \frac{1}{b} x^2 + \frac{c}{b} = + \frac{1}{b} x^2 + \frac{c}{b} \text{ addirt.}$$

$$x^4 - \frac{3}{b} x^3 - \frac{a}{b} x^2 + \frac{1}{b} x^2 + \frac{c}{b} = 0$$

$$\text{Oder } x^4 - \frac{3}{b} x^3 - \frac{a-1}{b} x^2 + \frac{c}{b} = 0.$$

IV) Der Hauptzweck, warum Gleichungen behandelt werden, besteht darinnen, daß man die unbekannte Gröſſe auf eine Seite allein bringt; was auf der andern Seite steht, soll lauter bekannte Glieder enthalten, und auf diese Weise den Werth der unbekannten Gröſſe angeben.

Der Werth der unbekannten Gröſſe heißt die *Wurzel* der Gleichung.

§. 2.

Aufgabe.

Der allgemeine Ausdruck einer Gleichung des ersten Grades ist $x - a = 0$.

Der Wurzel der Gleichung ist $x = a$.

Es

Es kommt also nur darauf an, daß man jede gegebene Gleichung des ersten Grades auf diesen allgemeinen Ausdruck zu bringen wisse. Im Allgemeinen erhellt dieses schon aus §. 1. III; es wird aber gut seyn, an folgende besondere Regeln dazu zu erinnern.

- 1) Alle Glieder bringe man auf eine Seite.
- 2) Sollte x als Divisor vorkommen; so multiplicire man alles mit x.
- 3) Alle Glieder, die ein x enthalten, bringe man zusammen, dadurch erhält man eine gewisse Anzahl von x, die p heißen möge.
- 4) Mit p dividire man die Gleichung.
- 5) Sollte x negativ seyn; so darf man nur mit -1 multipliciren.

1. Beispiel.

$$\begin{aligned} fx - bc + bx - mx + n - dx \\ - mx - n + dx = -mx - n + dx \text{ addirt.} \end{aligned}$$

$$fx - bc + bx - mx - n + dx = 0 \text{ wegen 1}$$

$$fx + bx - mx + dx - bc - n = 0$$

$$(f + b - m + d)x - (bc + n) = 0 \text{ wegen 3,}$$

mit $f + b - m + d$ wegen 4 dividirt giebt

$$x = \frac{bc + n}{f + b - m + d} = 0.$$

2. Bei-

2. Beispiel.

$$\begin{array}{rcl}
 \frac{a}{x} & = & b \\
 \hline
 \frac{a}{x} - b & = & 0 \\
 a - x b & = & 0 \\
 \text{mit } -1 \quad \text{multiplicirt} & & \\
 \hline
 -a + x b & = & 0 \\
 \text{mit } b \quad \text{dividirt} & & \\
 \hline
 x - \frac{a}{b} & = & 0.
 \end{array}$$

Mehrere Beispiele der Behandlung dieser Gleichungen sind schon in der Arithmetik, z. B. bei dem Summiren arithmetischer und geometrischer Progressionen, der Zinsrechnung u. s. w. vorgekommen.

§. 3.

Aufgabe.

Der allgemeine Ausdruck einer Gleichung des 2ten Grades ist $x^2 + ax + b = 0$ und die Wurzel ist $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - b\right)}$

Beweis.

Nach der Gleichung ist $x^2 + ax = -b$.
Addirte man auf beiden Seiten $\frac{1}{4}a^2$ dazu; so wäre
 $x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 - b$.

Aber

Aber $x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = (x + \frac{1}{2}a)^2$ (§. 43):
daher ist auch $(x + \frac{1}{2}a)^2 = \frac{1}{4}a^2 - b$.

Wird aus beiden Theilen die Wurzel gezogen;
so kommt

$$\sqrt{(x + \frac{1}{2}a)^2} = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b)}$$

$$\text{Das ist } x + \frac{1}{2}a = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b)}$$

$$\text{Wird } + \frac{1}{2}a = + \frac{1}{2}a \text{ abgezogen.}$$

$$\text{so erhält man } x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b)}$$

Jede Quadrat-Wurzel kann aber an sich; sowohl positiv als negativ seyn, weil z. B. sowohl $-y$. $-y$, als $+y$. $+y = y^2$ ist. Daher findet auch noch folgender Werth statt

$$x = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b)}.$$

Zuf. 1. Der Coefficient a könnte negativ seyn, so dafs also $a = -\alpha$. Dann ist die vorige Gleichung so: $x^2 - \alpha x + b = 0$ und die Wurzel ist $x = +\frac{1}{2}\alpha \pm \sqrt{(\frac{1}{4}\alpha^2 - b)}$.

Zuf. 2. Für $b = -\beta$ ist die Gleichung $x^2 + ax - \beta = 0$ und die Wurzel $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \beta)}$.

Zuf. 3. Sind beide Coefficienten a und b negativ; so ist die Gleichung $x^2 - \alpha x + \beta$ und $x = +\frac{1}{2}\alpha \pm \sqrt{(\frac{1}{4}\alpha^2 - \beta)}$.

Bei-

Beispiel.

Aus dem Vorigen ist bekannt, daß die Summe einer arithmetischen Reihe, von n Gliedern, deren erstes a heist, und die Differenz d ist, durch folgende Formel ausgedrückt wird:

$$S = \frac{2an + d(n-1)n}{2}.$$

Wollte man aus der Summe, dem ersten Gliede und der Differenz die Anzahl der Glieder finden; so müßte man n auf eine Seite allein zu bringen suchen. Man würde bei der Ausführung nun auf folgende Sätze stoßen:

$$\begin{aligned} 2S &= 2an + d(n-1)n \\ 2S &= 2an + dn^2 - dn \\ dn^2 - dn + 2an - 2S &= 0 \end{aligned}$$

Wird mit d dividirt; so hat man

$$\begin{aligned} n^2 - \frac{dn}{d} + \frac{2an}{d} - \frac{2S}{d} &= 0 \\ \text{Oder } n^2 + \frac{2a-d}{d} n - \frac{2S}{d} &= 0 \end{aligned}$$

Dieses ist daher eine Gleichung von der Form des 2ten Satzes.

Was dort x ist, heist hier n .

$$\begin{aligned} \cdot \cdot \cdot a \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{2a-d}{d} \\ \cdot \cdot \cdot \beta \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{2S}{d} \end{aligned}$$

Folg-

Folglich ist $n = -\frac{2a-d}{2d} \pm \sqrt{\left(\frac{(2a-d)^2}{4d^2} + \frac{2S}{d}\right)}$.

Ist daher in diesem Beispiele $a = 3$; $d = 2$ und $S = 80$; so ist $n = -\frac{4}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{16}{4} + 80\right)}$.

Oder n ist $+8$ oder -10 . Da man aber offenbar etwas positives sucht; so ist 8 , die gesuchte Anzahl der Glieder.

§. 4.

Aufgabe.

Um das allgemeinste von den Gleichungen höherer Grade beizubringen, muß erst eine Vorschrift ausgemittelt werden, nach welcher eine zweitheilige Wurzel $a + b$ (ein Binomium) auf eine jede beliebige Potenz erhoben werden kann.

Dazu gelangt man auf folgendem Wege:

I) Wenn man $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ mit der Wurzel $a + b$ multiplicirt; so erhält man $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Denn $a \cdot (a+b)^3 = a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3$

und $b \cdot (a+b)^3 = a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4$

Daher $(a+b)(a+b)^3 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Man kann daher folgende Potenzen von $a+b$ zur Uebersicht zusammenstellen:

Die

$$\begin{aligned}
 \text{Die erste Potenz} &= 1a + 1b \\
 \text{Die 2te} &= 1a^2 + 2ab + 1b^2 \\
 \text{Die 3te} &= 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3 \\
 \text{Die 4te} &= 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4
 \end{aligned}$$

Hieraus sieht man, daß im ersten Gliede die Potenz von a immer am größten ist und abnimmt, bis a^0 im letzten Gliede. Eben so kommt b im ersten Gliede auf der ersten Potenz vor, im 2ten auf der ersten u. s. w., bis es im letzten Gliede auf der höchsten Potenz steht.

Die Zahlen bei a und b heißen Coefficienten, und hier insbesondere Binomial-Coefficienten.

II) Will man untersuchen, ob das in I angegebene Gesetz in Absicht auf die Potenzen von a und b allgemein sey; so nehme man einstweilen an, dieses Gesetz finde bei der m ten Potenz von $a+b$ Statt. Wenn man die Coefficienten von der m ten Potenz mit μ einstweilen bezeichnet, und die Zahl des Gliedes wozu der Coefficient gehört, linker Hand von μ mit einer kleinen Ziffer beschreibt, so daß z. B. $^1\mu$, $^2\mu$, $^3\mu$ die Coefficienten für das erste, zweite, rte Glied der m ten Potenz von $a+b$ anzeigt;

$$(a+b)^m = {}^1\mu_a m + {}^2\mu_a m-1b + {}^3\mu_a m-2b^2 + \dots + {}^r\mu_a 2b^{m-2} + {}^s\mu_a b^{m-1} + {}^t\mu_b m$$

Diese

multiplieirt mit $a+b$

$$a(a+b)^m = {}^1\mu_a m+1 + {}^2\mu_a m b + {}^3\mu_a m-1b^2 + \dots + {}^s\mu_a 2b^{m-1} + {}^t\mu_a b^m$$

$$b(a+b)^m = {}^1\mu_a m b + {}^2\mu_a m-1b^2 + \dots + {}^r\mu_a 2b^{m-1} + {}^s\mu_a b^m + {}^t\mu_b m+1$$

$$(a+b)^{m+1} = {}^1\mu_a m+1 + ({}^2\mu_a + {}^1\mu_a) a^m b + ({}^3\mu_a + {}^2\mu_a) a^{m-1} b^2 + \dots + ({}^s\mu_a + {}^r\mu_a) a^2 b^{m-1} + ({}^t\mu_a + {}^s\mu_a) a b^m + {}^t\mu_b m+1$$

Und für $n = m+1$, und wenn v eben so gebraucht wird, wie μ

$$(a+b)^n = {}^1v_a n + {}^2v_a n-1b + {}^3v_a n-2b^2 + \dots + {}^s v_a 2b^{n-2} + {}^t v_a b^{n-1} + {}^u v_b n.$$

so ist

Diese Multiplication zeigt, daß das Gesetz, nach welchen sich die Potenzen von a und b richten, allezeit auch von der $(m+1)$ ten Potenz gelte, wenn man annimmt, daß es von der m ten gelte.

Nun ist es aber wahr, für die 4te Potenz, also auch für die 5te. Da es von der 5ten wahr ist, so ist es auch von der 6ten u. s. w.

III) Die nämliche Multiplication zeigt, daß die $(m+1)$ te Potenz ein Glied mehr haben müsse, als die m te. Nun hat die erste Potenz 2 Glieder, also die 2te 3; und die m te Potenz von $a+b$ hat $m+1$ Glieder.

IV) Der Coefficient des ersten und letzten Gliedes ist für die m te und für die $(m+1)$ te Potenz einerlei. Nun sind die ersten und letzten Coefficienten der 4ten Potenz $= 1$; also sind sie auch für die 5te und alle folgende Potenzen $= 1$.

V) Außerdem geht auch aus derselben Multiplication noch folgendes Gesetz für die übrigen Coefficienten hervor, daß überhaupt der Coefficient des $sten$ Gliedes der $(m+1)$ ten Potenz gleich ist der Summe der Coefficienten des $sten$ und $rten$ Gliedes in der m ten Potenz. Ist daher $n = m+1$ und wird ν eben so zum Bezeichnen der Coefficienten der n ten Potenz gebraucht; so ist ${}^1\nu = {}^1\mu = 1$; ${}^2\nu = {}^2\mu + {}^1\mu$; ${}^3\nu = {}^3\mu + {}^2\mu$; ${}^4\nu = {}^4\mu + {}^3\mu$ u. s. w.

Daraus

Daraus geht folgende Tafel für die Coefficienten durch bloßes Addiren hervor

Erste Potenz	1	1						
2te	1	2	1					
3te	1	3	3	1				
4te	1	4	6	4	1			
5te	1	5	10	10	5	1		
6te	1	6	15	20	15	6	1	u. f. w.

VI. ${}^2\mu = m$.

Der Beweis ist leicht. Angenommen es sey wirklich der Coefficient ${}^2\mu = m$ in der mten Potenz; so folgt ${}^2\nu = m + 1 = n$. Denn nach V ist ${}^2\nu = {}^2\mu + {}^1\mu$ und nach IV ist ${}^1\mu = 1$.

Nun ist aber für $m = 4$ in der That ${}^2\mu = m$; daher ist auch für $n = 5$, ${}^2\nu = n$. Die Annahme ist daher auch für $m = 5$ wahr, also auch für $n = 6$. Da sie für die 6te Potenz wahr ist; so ist sie denselben Schlüssen zufolge auch für die 7te wahr u. f. w.

VII. Der Coefficient des 3ten Gliedes in der 2ten Potenz ist $= 1$ nach der Tafel in V. Er soll durch ${}^3_2$ bezeichnet werden; so soll auch ${}^3_4$ den Coefficienten des 5ten Gliedes von der 4ten Potenz bezeichnen.

Aus

Aus der Tafel in V hat man also

$$^3_2 = 1$$

$$^3_3 = ^3_2 + ^2_2 = 1 + 2$$

$$^3_4 = ^3_3 + ^2_3 = 1 + 2 + 3$$

$$^3_5 = ^3_4 + ^2_4 = 1 + 2 + 3 + 4 \text{ u. f. w.}$$

Um zu erfahren ob allgemein $^3_\mu = 1 + 2 + 3 + \dots + (m-1)$, welches nach der Lehre von den Progressionen (§. 54 Arithm.) $= \frac{m.(m-1)}{2}$ ist, nehme man an, es sey wenigstens in irgend einer Potenz m der Fall, dafs $^3_\mu = \frac{m.(m-1)}{2}$ wäre.

$$\begin{aligned} \text{Da nun } ^3_\nu &= ^3_\mu + ^2_\mu; \text{ so wäre } ^3_\nu = \frac{m.(m-1)}{2} + m. \\ &= \frac{m.(m-1) + 2m}{2} = \frac{mm - m + 2m}{2} = \frac{mm + m}{2} \\ &= \frac{(m+1)m}{2} = \frac{n.(n-1)}{2}; \text{ also } ^3_\nu = \frac{n.(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

Nun ist aber dieses Gesetz, den Coefficienten des 3ten Gliedes auszudrücken, für die 5te Potenz richtig; also ist es nach dem obigen Schlusse, weil auch $^3_\nu = \frac{n.(n-1)}{2}$, auch für die 6te Potenz und ebendeshalb für die 7te Potenz u. f. w. richtig.

VIII. Da ${}^2\mu = \frac{m}{1}$ und ${}^3\mu = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$; so

kann man auf die Vermuthung gerathen, daß

vielleicht ${}^4\mu = \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, und diese

Vermuthung trifft zu bei den in der Tafel V berechneten Coefficienten.

Man nehme nun einmal an, es sey bei einer Po-

tenz ${}^4\mu = \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$; so müste ${}^4\nu = {}^4\mu +$

${}^3\mu = \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2}$ seyn.

Bringt man beide Brüche unter einerlei Nenner; so sind beide Zähler $= m \cdot (m-1) \cdot (m-2) + 3 \cdot m \cdot (m-1) = m^3 - 3m^2 + 2m + 3m^2 - 3m = m^3 - m$. Dieser letzte Ausdruck ist $= (m+1) m \cdot (m-1)$, wie man sich durch eine leichte Multiplication überzeugt. Setzt man für $m+1$ das n hinein; so ist

$${}^4\nu = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Ist daher ${}^4\mu = \frac{m \cdot (m-1) \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$; so folgt auch

daß ${}^4\nu = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ seyn müsse.

Nun ist aber für $m = 5$ wirklich ${}^4\mu$ dem vorigen Ausdrucke gleich; also gilt auch für ${}^4\nu$ dasselbe und n ist $= 6$.

Nun

Nun kann man $m = 6$ setzen, dann folgt die Richtigkeit dieses Gesetzes für die 7te Potenz u. s. w.

IX) Eine gleiche Vermuthung findet für ${}^5\mu$, ${}^6\mu$ u. s. w. Statt, und man kann sich auf dem nämlichen Wege von ihrer Richtigkeit und Allgemeinheit überzeugen, so dafs also

$$\begin{aligned}(a+b)^m &= a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{2} a^{m-2}b^2 + \\ &+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3}b^3 + \dots + \\ &+ \frac{m(m-1)\dots 2}{1 \cdot 2 \dots (m-1)} ab^{m-1} + b^m.\end{aligned}$$

Dieser Satz ist unter dem Namen des binomischen Lehrsatzes bekannt.

Zuf. 1. Der Art nach, wie er gefunden worden ist, ist er nur für den Fall gültig; wenn m eine ganze bejahte Zahl bedeutet. Er läßt sich aber auf negative Zahlen erstrecken, wenn man $n = m - 1$ annimmt, und statt der Multiplication in II mit $(a+b)$ dividirt.

Außerdem ist der Satz auch für gebrochene Exponenten wahr, aber der Beweis dazu für die Grenzen dieses Buches zu weitläufig.

Zuf. 2. Heißt die Wurzel $a-b$; so haben alle Glieder wo b auf einer ungraden Potenz vorkommt das Zeichen — .

Zuf.

Zuf. 3. Es darf nicht befremden, dafs, wie man bei V aus der Tafel sieht, die Coefficienten grade so wieder abnehmen, wie sie zugenommen haben. Dafs dieses so erfolgen müsse, sieht man schon, wenn man $(b+a)^m$ setzt, und die Glieder verkehrt ansieht.

Beispiel.

$$\begin{aligned}
 (a+b)^8 &= a^8 + 8a^7b + \frac{8 \cdot 7}{2} a^6b^2 + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3} a^5b^3 \\
 &+ \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4} a^4b^4 + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^3b^5 + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} a^2b^6 \\
 &+ \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} ab^7 + b^8 \\
 &= a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 \\
 &+ 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8.
 \end{aligned}$$

§. 5.

Aufgabe.

I) Eine Gleichung des 2ten Grades $x^2 + Ax + B = G^2$ *) kann als ein Product aus 2 Factoren angesehen werden, die von der Gestalt $x-a$ und $x-b$ sind. Denn

wenn man beide

$$\begin{array}{r}
 x-a \\
 x-b \\
 \hline
 -bx + ab \\
 \hline
 x^2 - ax
 \end{array}$$

mit einander multiplicirt; so

$$\begin{array}{r}
 x^2 - ax \\
 \hline
 = x^2 - (a+b)x + ab.
 \end{array}$$

erhält man

Wird

*) Dieses Zeichen soll einstweilen eine Gleichung von dem Grade anzeigen, als die dazu geschriebene Zahl ansetzt: und auch zugleich den Betrag der Gleichung.

Wird daher $A = -(a+b)$ und $B = ab$ angenommen; so ist die Gleichung $x^2 + Ax + B = G^2$ ein Product aus $x-a$ und $x-b$.

II) Eben so kann auch $x^3 + Ax^2 + Bx + C = G^3$ in ein Product aus drei Factoren von der Gestalt $x-a$, $x-b$ und $x-c$ zerfällt werden.

Denn nach I ist $(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$

Wird dieses multiplicirt mit $x - c$

$$\begin{array}{r} -cx^2 + (ac+bc)x - acb \\ x^3 - (a+b)x^2 + abx \\ \hline \end{array}$$

so ist das Product $= x^3 - (a+b+c)x^2 + (ac+ab+bc)x - acb$. Nimmt man daher $A = -(a+b+c)$; $B = ac + ab + bc$ und $C = -abc$ an; so ist G^3 ein Product aus $x-a$; $x-b$ und $x-c$.

§. 6.

Angenommen, dass eine Gleichung des n ten Grades $= G^n$ sich als ein Product aus n Factoren vorstellen lasse; so folgt, dass eine Gleichung des $(n+1)$ ten Grades $= G^{n+1}$ sich als ein Product von $(n+1)$ Factoren vorstellen lassen müsse.

Beweis.

Wenn $x^n + Ax^{n-1} + \dots + Px^2 + Qx + R = (x-a)(x-b) \dots (x-p)(x-q)(x-r) = G^n$; so ist $(x-a)(x-b) \dots (x-q)(x-r)(x-s) = (x^n + Ax^{n-1} + \dots + Px^2 + Qx + R)(x-s)$.

Diese

Diese zuletzt angedeutete Multiplication führe man wirklich aus.

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \dots + Px^2 + Qx + R$$

S. 7.

$$x - s$$

$$- s x^n - s A x^{n-1} - s B x^{n-2} - \dots - s P x^2 - s Q x - R s$$

$$x^{n+1} + A x^n + B x^{n-1} + \dots + Q x^2 + R x$$

M^a

$$x^{n+1} + (A-s)x^n + (B-sA)x^{n-1} + \dots + (Q-sP)x^2 + (R-sQ)x - R s.$$

Dieser Ausdruck ist eine Gleichung des (n+1)ten Grades, oder $= G^{(n+1)}$. Da sie nun einen Factor mehr hat als G^n , nämlich den Factor $x-s$; G^n aber sich in n Factoren zerfällen liefs; so kann auch deswegen $G^{(n+1)}$ in (n+1) Factoren zerfällt werden.

§. 7.

Jede G^n kann in n Factoren zerfällt werden.

Beweis.

Nach §. 5. kann G^3 in 3 Factoren zerfällt werden; folglich kann nach §. 6. auch G^4 in 4 Factoren zerfällt werden. Da dieses angeht; so kann wieder nach §. 6 G^5 in 5 Factoren zerfällt werden u. f. w.

§. 8.

Jede G^n hat n Wurzeln.

Beweis.

G^n hat n Factoren. Da jede Gleichung $= 0$ gemacht werden kann; (§. 1. III.) so sey $G^n = 0$. Ein Product wird aber $= 0$, wenn ein Factor desselben $= 0$ ist. Nun kann man alle einzelnen Factoren successive $= 0$ setzen. Ist nun $x - a = 0$; so ist $x = a$ (§. 2.); Für $x - b = 0$ ist $x = b$; für $x - c = 0$ ist $x = c$ u. f. w.; kurz x kann so viele Werthe haben, als es Factoren in G^n giebt; d. i. der Gleichung G^n kommen n Wurzeln zu.

§. 9.

Wenn eine Gleichung des n ten Grades $G^n = 0$, durch einen Factor $x - a$, der jetzt nicht grade $= 0$ seyn müßte, dividirt wird; so ist der Quotient $= 0$. Der Quotient enthält aber x auf der $(n-1)$ ten Potenz
und

und giebt daher eine Gleichung von $(n-1)$ ten Grade, $G^{n-1} = 0$. Dividirt man diese von neuem durch $(x-b)$; so ist der Quotient $G^{n-2} = 0$.

Nach $n-1$ Divisionen ist der Quotient $= G^{n-(n-1)} = G^{n-n+1} = G^1$; also eine Gleichung des ersten Grades von der Gestalt $x-r = 0$.

Der Satz ist aus dem Begriffe der Factoren und Division einleuchtend.

§. 10.

Der letzte Coefficient einer Gleichung ist immer ein Product aus allen Wurzeln der Gleichung.

Beweis.

I) Angenommen dieses sey der Fall in G^n und $R(§. 6)$ sey wirklich $= ab \dots qr$; so sieht man aus der Multiplication §. 6 dafs der letzte Coefficient der G^{n+1} einen Factor mehr hat nämlich s , und dieses s ist grade die Wurzel der G^{n+1} , welche zu den n Wurzeln der G^n noch hinzugekommen war. Also wenn der Satz einmal von der Gleichung irgend eines Grades wahr ist; so gilt er auch von der Gleichung des nächst höhern Grades.

II) Nun ist er aber von der G^3 §. 5 wahr; also auch vermöge I von G^4 : d. i. weil G^3 zum letzten Coefficienten abc hatte; so hat G^4 zum letzten Coefficienten $abcd$, u. s. w.

§. 11.

In einer Gleichung, die lauter positive Wurzeln hat, wechseln die Zeichen der Coefficienten beständig ab. d. i. A, C, E u. s. w. sind negativ, B, D, F u. s. w. sind positiv.

Beweis.

I) Angenommen, es sey in §. 6. bei G^n A, C, ... P und R negativ, B, D . . . und Q aber positiv; so ist dorten in G^{n+1} auch $A - s$ und $R - sQ$ negativ, aber $B - sA$ $Q - sP$ und $- sR$ positiv. Oder deutlicher, wenn $A = -\alpha$; $C = -\gamma$; $P = -\pi$ und $R = -\rho$; so ist

$$A - s = -\alpha - s = -(\alpha + s)$$

$$R - sQ = -\rho - sQ = -(\rho + sQ)$$

$$B - sA = B + s\alpha$$

$$Q - sP = Q + s\pi$$

$$- sR = + s\rho.$$

Das heist, weil in G^n unter der Annahme lauter positiver Wurzeln die Zeichen der Coefficienten beständig wechseln; so müssen sie auch in G^{n+1} unter derselben Annahme wechseln.

II) Nun aber gilt dieses nach §. 5. II. von $n = 3$; also auch vermöge I von $(n+1) = 4$. Da es nun von G^4 gilt; so gilt es vermöge I auch von G^5 u. s. w.

Zu f.

Zuf. Ob R in G^n positiv oder negativ seyn werde, hängt, wie man leicht sieht davon ab, ob n eine grade oder ungrade Zahl ist; immer folgt aber für G^{n+1} dieselbe Abwechselung der Zeichen.

§. 12.

In einer Gleichung, die lauter negative Wurzeln hat, sind alle Coefficienten positiv.

Beweis.

Wenn $x = -\alpha$; $= -\beta \dots$ und $= -\gamma$; so ist $x + \alpha = 0$; so auch $x + \beta$; $x + \gamma$. In allen n Factoren von G^n kommen daher nur die Zeichen $+$ vor. Es kann daher auch kein Theil des Products das Zeichen $-$ haben.

Zuf. 1. Wären alle Glieder der Gleichung negativ; so ist es ganz dasselbe. Denn wenn $G^n = 0$; so ist auch $-G^n = 0$.

Zuf. 2. Aus §. 11 und 12 ergibt sich also; daß eine Gleichung nur positive Wurzeln habe, wenn lauter *Abwechselungen*, und nur negative, wenn lauter *Folgen* in derselben vorkommen.

Zuf. 3. So oft die Abwechslungen unterbrochen werden; so oft ist zu vermuthen, daß eine negative Wurzel daran Schuld seyn werde; so oft die Folgen unterbrochen werden; ist wohl eine positive

tive Wurzel die Veranlassung dazu. Man kann also überhaupt vermuthen, daß eine Gleichung so viel positive Wurzeln haben werde, als Abwechslungen, und so viel negative, als Folgen in den Gliedern vorkommen.

Anmerkung.

Dieser Satz, der hier nur als Vermuthung vorge-
tragen worden ist und von seinem Erfinder der *Har-*
riotische heißt, kann hier ohne Weitläufigkeit nicht
demonstrirt werden. Es mag hier hinreichen, an
einigen Beispielen seine Richtigkeit zu zeigen.

Es sey $x = + 1; - 2; + 2; - 3.$

Dann ist $G^1 = x - 1 = 0$

Mit $x + 2$ multiplicirt

$$\begin{array}{r} \hline 2x - 2 \\ x^2 - x \\ \hline \end{array}$$

$$G^2 = x^2 + x - 1$$

Mit $x - 2$ multiplicirt.

$$\begin{array}{r} \hline -2x^2 - 2x + 2 \\ x^3 + x^2 - x \\ \hline \end{array}$$

$$G^3 = x^3 - x^2 - 3x + 2$$

$$x + 3$$

$$3x^3 - 3x^2 - 9x + 6$$

$$x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x$$

$$G^4 = x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 7x + 6.$$

G^3

G^1 hat eine Abwechslung, die Wurzel ist $+ 1$.

G^2 hat eine Folge und eine Abwechslung, die 2 Wurzeln sind $+ 1$ und $- 2$.

G^3 hat 2 Abwechslungen und eine Folge, die Wurzeln sind $+ 1$, $- 2$ und $+ 2$.

G^4 hat so viele Abwechslungen, als Folgen; und auch so viele positive als negative Wurzeln.

§. 13.

Aufgabe.

Wenn in einer Gleichung, deren unbekannte Grösse x ist, $z + f$ statt x gesetzt, und f so angenommen wird, dass in der neuen Gleichung für z alle Glieder positiv sind; so ist kein positiver Werth von x gröfser als f .

Beweis.

Da die Gleichung, deren unbekannte Grösse z ist, lauter positive Coefficienten hat; so sind alle Werthe von z negativ. Es sey daher $z = - \zeta$; so ist $x = f - \zeta$. Der größte Werth von x hängt daher vom kleinsten Werthe von ζ ab. Da dieser nicht kleiner seyn kann als 0; so ist f der größte positive Werth von x .

An-

Anmerkung.

Dieses f heist die *positive Grenze der Wurzeln* in der Gleichung für x .

Eine Gleichung, wie die Gleichung mit x , heist die *Hauptgleichung* in Bezug auf die mit z , welche die *abgeleitete* heist.

Beispiel.

Die Hauptgleichung sei $x^3 - 16x^2 + 44x + 160 = 0$; so ist, wenn $z+f$ für x gesetzt wird

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & z^3 + 3fz^2 + 3f^2z + f^3 \\ -16x^2 & = & -16z^2 - 32fz - 16f^2 \\ +44x & = & +44z + 44f \\ +160 & = & +160 \end{array}$$

Daher $z^3 + (3f-16)z^2 + (3f^2+44-32f)z + (f^3+44f+160-16f^2) = 0$.

Soll diese Gleichung für z nur positive Coefficienten haben; so muss f so angenommen werden, dass

$$\begin{array}{l} 3f \text{ gröfser ist als } 16 \\ 3f^2 + 44 \dots\dots\dots 32f \\ f^3 + 44f + 160 \dots 16f^2 \end{array}$$

Und diese Bedingung wird erfüllt, wenn man $f = 10$ macht. Daher ist keine positive Wurzel der Hauptgleichung gröfser als 10.

§. 14.

Aufgabe.

Wenn statt x in der Hauptgleichung $z - f$ gesetzt, und f so angenommen wird, daß in den abgeleiteten Gleichungen lauter Abwechslungen vorkommen; so ist f die negative Gränze der Wurzeln in der Hauptgleichung.

Beweis.

Nach §. 11 kann z nur positive Werthe haben: Da nun $x = z - f$ ist, z aber nicht kleiner seyn kann als 0; so ist f die größte mögliche negative Wurzel der Hauptgleichung.

§. 15.

Aufgabe.

Hat eine Gleichung vom n ten Grade gebrochene Coefficienten, so suche man eine Zahl von der Art, daß sie als gemeinschaftlicher Nenner aller Brüche gebraucht werden könnte. Diese Zahl heiße r . Setzt man nun $\frac{z}{r}$ statt x in die Gleichung, und multiplicirt man alle Glieder der abgeleiteten Gleichung mit r^n ; so hat man eine Gleichung in der keine gebrochene Coefficienten vorkommen. Durch das z der abgeleiteten Gleichung ist dann auch x bestimmt.

Be-

Beweis.

Es sey die Hauptgleichung

$$x^n + \frac{a}{b} x^{n-1} + \frac{c}{d} x^{n-2} + \dots + \frac{q}{p} = 0.$$

so ist $bd \dots p = r$ und $\frac{z}{r}$ für x gesetzt, erhält man

$$\frac{z^n}{r^n} + \frac{az^{n-1}}{br^{n-1}} + \frac{cz^{n-2}}{dr^{n-2}} + \dots + \frac{q}{p} = 0.$$

Wird mit r^n multiplicirt; so heist diese Gleichung

$$z^n + \frac{ar}{b} z^{n-1} + \frac{cr^2}{d} z^{n-2} + \dots + \frac{qr^n}{p} = 0.$$

Weil aber $r = b \cdot d \dots p$; so ist $\frac{ar}{b}$, so wie jeder folgende Coefficient eine ganze Zahl.

§. 16.

Aufgabe.

Eine Gleichung, deren Wurzel eine ganze Zahl ist, aufzulösen, d. i. die Wurzeln der Gleichung zu finden.

Auflösung.

- 1) Man ordne die Gleichung nach §. 1. III.
- 2) Giebt es gebrochene Coefficienten, so schaffe man sie nach §. 15 hinweg, und beschäftige sich nun mit der abgeleiteten Gleichung.

3)

- 3) Den letzten Coefficienten zerfalle man in seine Factoren, einige davon sind Wurzeln der Gleichung. §. 10.
- 4) Um zu erfahren, welcher von diesen eine Wurzel sey, substituire man sie einzeln für die unbekannte Gröfse derjenigen Gleichung, mit der man sich beschäftigt. Ob man sie auch in negativer Beziehung versuchen solle, entscheidet §. 12. Zuf. 3. Sind der Factoren sehr viele; so kann man sich mittelst §. 13 und 14 die Arbeit erleichtern. Wird nach einer dieser Substitutionen die ganze Gleichung $= 0$; so ist der substituirte Factor eine Wurzel der Gleichung. Er heisse a .
- 5) Nun dividire man die Gleichung mit $x - a$ oder mit $z - a$, wenn Nr. 2. Statt gefunden hat. Der Quotient ist nach §. 9 eine Gleichung des $(n-1)$ ten Grades mit der man ferner nach Nr. 2, 3, 4 und 5 verfährt, bis man einen Quotienten gefunden hat, welcher G^2 ist, woraus sich alle Wurzeln der Gleichung ergeben. Hätte man bei G^2 stehen bleiben müssen; so liefsen sich die 2 noch übrigen Wurzeln vermöge §. 3 finden. Ob aber eine Gleichung ganze Zahlen zu ihren Wurzeln haben werden, entdeckt man erst durch die Auflösung selbst.

Beispiel.

Es sey die gegebene Gleichung $x^3 + \frac{3}{2}x^2 = \frac{100}{3}x + 70$.

Nach 1. $x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{100}{3}x - 70 = 0$.

Nach 2. Wenn $\frac{z}{6}$ für x genommen wird, ist die abgeleitete Gleichung $z^3 + 9z^2 - 1200z - 15120 = 0$.

Nach 3 sind die Factoren von 15120; 1. 2. 3. 4. 5. 6. 8 u. f. w. Diese wären positiv und negativ zu substituiren. Da ihrer so viele sind, so kann man die Gränze der Wurzel bestimmen. Die größte positive Wurzel kann nicht über 36 seyn: und wenn man nach Nr. 4. 36 für z substituirt; so wird die ganze Gleichung $= 0$ und $z = 36$ ist eine Wurzel der Gleichung.

Um die beiden andern zu finden, dividire man $z^3 + 9z^2 - 1200z - 15120$ durch $z - 36$. Der Quotient ist $z^2 + 45z + 420 = 0$.

Nach §. 3 sind die beiden Wurzeln $= -\frac{45}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{45^2}{4} - 420\right)} = -22,5 \pm 9,287\dots$

Daher sind die beiden andern Werthe $z = -31,787\dots$ und $z = -13,213$.

Da

Da $x = \frac{z}{6}$; so ist

$$x = \frac{36}{6} = 6$$

$$= -\frac{31,787}{6} = -5,298 \dots\dots$$

$$= -\frac{13,213}{6} = -2,202 \dots\dots$$

§. 17.

Aber nicht alle Gleichungen sind von der Art, daß ein Factor von dem letzten Coefficienten so beschaffen ist, daß er, für x substituirt, die Gleichung $= 0$ macht. In diesem Falle ist die Wurzel entweder *unmöglich* (imaginär) oder *irrational*.

Unmögliche Gröſſen entstehen, wenn die Wurzeln von einem Grade, dessen Wurzel-Exponent eine grade Zahl ist, aus einer negativen Gröſſe verlangt werden. Da nämlich alle Quadrate, 4te, 6te und überhaupt 2nte Potenzen von allen, selbst negativen Wurzeln positiv seyn müssen; so ist z. B. eine Quadratwurzel aus einem negativen Quadrate etwas Unmögliches. Der allgemeine Ausdruck einer unmöglichen Gröſſe ist $\sqrt[2n]{-a}$.

Auf unmögliche Gröſſen kann man bei der Auflösung von G^n stoſſen. Sobald nämlich in §. 3 b größer ist als $\frac{a^2}{4}$; so ist x unmöglich.

Die

Die Betrachtung der unmöglichen Wurzeln wird hier übergangen. Die irrationalen sind von gröfserer Wichtigkeit.

§. 18.

Wenn in der Gleichung $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \dots = G^n$; 2 consecutive Zahlen m und $n (= m+1)$ für x substituirt werden und die eine für G^n einen positiven, die andere aber einen negativen Werth angiebt; so ist eine Wurzel dieser Gleichung gröfser als m und kleiner als n , oder zwischen beiden gelegen.

Beweis.

Zu jedem Werth von x gehört ein bestimmter Werth von G^n . Wenn nun x von m zu n anwächst und G^n vom Negativen zum Positiven aufsteigt, oder vom Positiven zum Negativen herabsinkt; so mufs G^n auf diesem Wege das 0 passiren. Denn nach dem Begriffe von den entgegengesetzten Gröfsen ist in der Scale, die vom Positiven bis zum Negativen reicht immer das 0 begriffen (Arithm. §. 28). Daher mufs, indem x von m auf n übergeht, G^n inzwischen einmal auf den Null-Punct treffen. Nun ist aber diejenige Gröfse, welche für x substituirt, den Werth der Gleichung auf 0 bringt, eine Wurzel der Gleichung, also liegt unter diesen Umständen die Wurzel der Gleichung zwischen m und n .

Daraus

Daraus ist begreiflich, wie man verfahren müste, um die ganzen Zahlen zu bestimmen, zwischen welche alle Wurzeln der Gleichung fallen; man müste nämlich auf alle Uebergänge der G^n vom Positiven zum Negativen Acht haben.

Dafs auch hier der 13te und 14te §. zu gebrauchen sind, fällt in die Augen.

Beispiel.

$$y^4 + 17y^3 + 160y^2 + 2560y - 51200 = 0.$$

Nach §. 13 ist die positive Gränze der Wurzel $+ 9$ und die negative $- 21$. Macht man daher den Versuch für x zu substituiren; so finden folgende Werthe für G^4 statt.

Wenn $x =$		so ist $G^4 =$
9		$+ 3752$
8		$- 7680.$

Weil nun nach §. 12 die Gleichung nur eine positive Wurzel hat; so liegt diese zwischen 8 und 9.

Um die negativen Wurzeln zu finden ist

für $x =$		$G^n =$
— 21		$+ 2644$
— 20		$- 14400$
— 19		$- 28362$
— 18		$- 39608$
— 17		$- 48479$
— 16		$- 54296$ u. f. w.

N

Dieses

Dieses fortdauernde Anwachsen des Negativen zeigt schon an, daß, für kleinere Werthe der unbekannten GröÙe, G^4 nicht mehr ins Positive übergeht. Es giebt daher nur eine mögliche negative Wurzel, welche zwischen -20 und -21 gelegen ist.

§. 19.

Aufgabe.

Wenn die Wurzel von G^n in ganzen Zahlen bekannt ist; so kann sie auf folgende Weise durch Annäherung so genau, als man will, gefunden werden.

Ist nämlich x in ganzen Zahlen $\equiv r$; so ist viel genauer

$$x = \frac{(n-1)r^n + (n-2)Ar^{(n-1)} + (n-3)Br^{(n-2)} + \dots}{nr^{(n-1)} + (n-1)Ar^{(n-2)} + (n-2)Br^{(n-3)} + \dots}$$

u. s. w. u. s. w.

Durch diese Formel erhält man x auf ein oder einige Decimal Theile richtig; wird nun dieser neue Werth statt r in die Formel gesetzt; so erhält man x noch genauer. Mit der Substitution der mehr genäherten Werthe von x statt r fährt man so lange fort, bis man einen Werth für x gefunden hat, der die hinlängliche Genauigkeit hat.

Beweis.

Es sey die Gleichung gegeben:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \dots + R = 0.$$

Nun

Nun sey x beinahe $= r$, aber so, daß $r+z = x$ und z kleiner als 1 ist.

Substituirt man $r+z$ anstatt x in die Gleichung; so erhält man eine abgeleitete, in welcher z vorkommt, und in welcher man die höhern Potenzen von z von der n ten an ohne großen Nachtheil vernachlässigen kann.

Es ist also

$$x^n = r^n + nr^{(n-1)}z + \dots (\S. 4.)$$

$$Ax^{n-1} = Ar^{(n-1)} + A(n-1)r^{(n-2)}z + \dots$$

$$Bx^{n-2} = Br^{n-2} + B(n-2)r^{(n-3)}z + \dots$$

u. f. w.

Daher ist ohne großen Irrthum

$$\begin{aligned} & r^n + Ar^{(n-1)} + Br^{(n-2)} + \dots \\ & + [nr^{(n-1)} + A(n-1)r^{n-2} + B(n-2)r^{(n-3)} + \dots]z \\ & = 0. \text{ Oder } z \text{ ist ohne großen Irrthum} \end{aligned}$$

$$= \frac{-(r^n + Ar^{(n-1)} + Br^{(n-2)} + \dots)}{nr^{(n-1)} + A(n-1)r^{(n-2)} + B(n-2)r^{(n-3)} + \dots}$$

$$\text{Also ist } x = r - \frac{r^n + Ar^{(n-1)} + Br^{(n-2)} + \dots}{nr^{(n-1)} + A(n-1)r^{(n-2)} + \dots}$$

u. f. w.

Bringt man den ersten Theil oder r auf einerlei Nenner mit dem Bruch der negativ ist; so ist der Zähler dazu

$$= nr^n + A(n-1)r^{(n-1)} + B(n-2)r^{(n-2)} + \dots$$

Wird nun $r^n + Ar^{(n-1)} + Br^{(n-2)} + \dots$ oder der Zähler des negativen Bruches davon abgezogen; so bleibt für den nunmehrigen Zähler

$$(n-1)r^n + A(n-2)r^{(n-1)} + B(n-3)r^{(n-2)} + \dots$$

und x ist daher =

$$\frac{(n-1)r^n + A(n-2)r^{(n-1)} + B(n-3)r^{(n-2)} + \dots}{nr^{(n-1)} + A(n-1)r^{(n-2)} + B(n-2)r^{(n-3)} + \dots}$$

Dafs dieser Werth von x noch nicht ganz wahr ist, rührt von der Auslassung der höhern Potenzen von z her; allein er ist auf alle Fälle richtiger als r . Dadurch erhält man also ein verbessertes r ; und wenn nun wieder $r+z$ für x substituirt wird; so ist z noch kleiner, als vorher, und die Auslassung der höhern Potenzen von z wird noch unbedeutender. Bei öfterer Wiederholung dieser Substitution wird man sich daher dem Werthe von x immer mehr nähern.

Beispiel.

Die positive Wurzel von der vorigen Gleichung fällt zwischen 8 und 9, auch ist aus dem Beispiel des vorigen § zu vermuthen, dafs sie näher an 9 als an 8 treffen werde.

Setzt

Setzt man nun $r = 9$; so wird $x = 8,7$.

Setzt man $r = 8,7$; so wird $x = 8,691$.

Für $r = 8,691$ ist $x = 8,6897 \dots$ u. f. w.

So kann also x so genau gefunden werden, als es verlangt wird.

Eben so kann auch die negative Wurzel dieser Gleichung, die zwischen -21 und -22 fällt, näher bestimmt werden. Zuweilen aber kann man es nach der Absicht der Aufgabe bei der positiven Wurzel bewenden lassen. Dieses ist sogleich im gegenwärtigen Beispiel der Fall. Die Gleichung entstand nämlich bei der Frage, welche Procente angenommen werden müßten, wenn jemand, der im ersten Jahre 80 Fl. im 2ten 170 im 3ten 200 und im 4ten 400 Fl. anlegt, nach Verlauf voller 4 Jahre grade 1000 Fl. nach zusammengesetzten Zinsen davon erheben wollte.

Hier ist nach Arithm. §. 65.

$$80u^4 + 170u^3 + 200u^2 + 400u = 1000, \text{ oder nach } \S. 1. \text{ III } u^4 + \frac{17}{8}u^3 + \frac{20}{8}u^2 + 5u - \frac{1000}{8} = 0.$$

Nach §. 15 wird $u = \frac{y}{8}$ gesetzt, dadurch erhält man $y^4 + 17y^3 + 160y^2 + 2560y - 51200 = 0$. Da nun $y = 8,6897$ und $u = \frac{y}{8}$; so ist $u = 1,0862$, die gesuchten Procente sind daher $8\frac{62}{100}$.

An-

Anmerkung.

Es kann Fälle geben, wo die Vorschrift dieses § noch nicht mit Erfolg angewandt wird, wenn man gleich x in ganzen Zahlen kennt. Diese Fälle treten ein, wenn z in Vergleichung mit r noch groß ist. Dann darf man nur durch Versuche noch ausmitteln, zwischen welche 2 consecutive Zehnthteile oder, wenn es nöthig wäre, Hunderttheile, die Wurzel fällt, ehe man das Verfahren dieses § anwendet.

§. 20.

Wenn eine Aufgabe zwei unbekannte Gröfsen enthält; so sind zu ihrer Auflösung auch zwei Gleichungen erforderlich. Heifsen nun die beiden unbekannten Gröfsen x und y so darf man nur in der ersten Gleichung x durch die übrigen Gröfsen ausdrücken, und diesen Werth von x in die 2te Gleichung setzen. Die zweite Gleichung wird daher blos y enthalten, welches nun nach den bisherigen Vorschriften leicht gefunden wird. Dieses heifst eine unbekannte Gröfse wegschaffen.

1. *Beispiel.*

Die Summe zweier unbekannten Gröfsen ist s und die Differenz dieser Gröfsen ist d , man verlangt beide unbekannte Gröfsen zu wissen.

Die beiden Gleichungen sind

$$1) \ x + y = s$$

$$2) \ x - y = d$$

Aus

Aus der ersten Gleichung ist $x = s - y$. Wird $s - y$ statt x in die 2te Gleichung gesetzt; so erhält man $s - y - y = d$ oder $s - 2y = d$. Daraus findet man leicht nach §. 2

$$y = \frac{s - d}{2} = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}d.$$

Da nun ferner $s - y = x$; so ist auch dadurch x bekannt; es ist nämlich $= s - (\frac{1}{2}s - \frac{1}{2}d) = s - \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}d$ (Arithm. §. 30) $= \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}d$.

Dadurch ist also der arithmetische Satz gefunden worden, daß die eine GröÙe durch die Summe der halben Summe und der halben Differenz, und die andere durch die Differenz der halben Summe und der halben Differenz ausgedrückt wird.

Ist die Summe 80 und die Differenz 32; so ist die eine GröÙe $40 + 16 = 56$, die andere $40 - 16 = 24$. Auch ist wirklich $56 + 24 = 80$ und $56 - 24 = 32$.

2. Beispiel.

S soll in 2 Theile zertheilt werden, die sich verhalten, wie $a:b$.

Wenn diese beiden Theile x und y heißen; so hat man die Gleichungen

$$1) x + y = S$$

$$2) x : y = a : b.$$

Aus

Aus der ersten Gleichung hat man $x = S - y$.
 Dann sieht die 2te so aus $S - y : y = a : b$. Wendet
 man Arithm. §. 56 Nr. 1 auf diese Proportion an; so
 hat man $ay = (S - y)b = bS - by$; daraus wird
 nach §. 2 $(a + b)y = bS$ und $y = \frac{bS}{a + b}$. Da $x = S - y$;
 so ist es auch $= S - \frac{bS}{a + b}$. Bringt man S auf den
 Nenner $a + b$; so ist $x = \frac{S(a + b) - bS}{a + b} = \frac{aS + bS - bS}{a + b} =$
 $\frac{aS}{a + b}$. Vergl. Arithm. §. 60.

Zu §. Sind in einer Aufgabe 3 unbekannte Größen
 und 3 Gleichungen; so ist das Verfahren diesem
 ganz ähnlich. Heissen nämlich die 3 unbekann-
 ten Größen x, y, z ; so wird in der ersten Glei-
 chung das x durch y und z und andere bekannte
 Größen ausgedrückt; dieser Werth wird in die
 2te Gleichung gesetzt; so ist also nur noch y und z
 in der 2ten. Nun verfährt man mit der 2ten
 und 3ten ganz so, wie in diesem § gezeigt wor-
 den ist.

Beispiel.

S soll in die 3 Theile x, y und z vertheilt wer-
 den, so dafs $x : y = a : b$ und $y : z = b : c$.

1te Gleichung $x + y + z = S$

2te $x : y = a : b$

3te $y : z = b : c$.

Aus

Aus der ersten ist $x = S - y - z$. Dann heißt die 2te $S - y - z : y = a : b$. Daraus erhält man nach Arithm. §. 56. Nr. 1. $bS - by - bz = ay$ und ferner $y = \frac{bS - bz}{a+b}$.

Dadurch wird die 3te Gleichung in folgende Gestalt verwandelt $\frac{bS - bz}{a+b} : z = b : c$. Oder es

ist Arithm. §. 56. $\frac{cbS - bcz}{a+b} = bz$

folglich ist $cbS - bcz = abz + bbz$

$$cbS = abz + bcz + bbz$$

$$cS = az + cz + bz$$

$$cS = (a+b+c)z$$

$$\text{Also } z = \frac{cS}{a+b+c}.$$

Nun findet sich auch aus der 2ten Gleichung y und aus der ersten x .

§. 21.

Wenn eine der unbekannten Gröſſen in einer von beiden Gleichungen nur auf der ersten Potenz vorkommt; so hat es keine Schwierigkeit, sie durch die andere unbekannte auszudrücken und durch Substitution eine Gleichung zu finden, in welcher nur die andere unbekannte Gröſſe vorkommt.

Die

Die beiden Gleichungen seyen 1) $x^3 + yx^2 + b = 0$.
2) $x^4 - y^2x + c = 0$.

Aus der ersten Gleichung ist $y = \frac{-(x^3 + b)}{x^2}$

Wird dieser Ausdruck aufs Quadrat erhoben und für y^2 in die 2te gesetzt; so hat man $x^4 - \frac{x^6 + 2bx^3 + b^2}{x^2} + c = 0$, welches die 3te Gleichung ist, in der kein y vorkommt, und in der man nach den bisherigen Vorschriften x findet.

§. 22.

Wenn zwei Gleichungen in welchen x und y vorkommen, nach x geordnet sind, und beide Gleichungen sind vom n ten Grad, so kann eine Gleichung aus beiden gemacht werden, in welcher x auf einer niedrigeren Potenz vorkommt. Man darf nur in beiden Gleichungen die höchste Potenz von x durch die übrigen Größen ausdrücken, und die so gefundenen Werthe, von x^n aus beiden Gleichungen einander gleich setzen.

Beispiel.

$$1) \quad x^3 + yx^2 - y^3x = 0.$$

$$2) \quad x^3 - 8yx = 0.$$

Aus der ersten Gleichung ist $x^3 = -yx^2 + y^3x$.

Aus der zweiten . . . $x^3 = 8yx$

Daher ist die 3te Gleichung $8yx = -yx^2 + y^3x$,
in welcher x nur auf der 2ten Potenz vorkommt.

§. 23.

Aufgabe.

In 2 Gleichungen $\textcircled{X}$ und $\textcircled{Y}$ befinden sich 2 unbekannte Gröſſen, und x , nach der beide geordnet ſind, iſt in $\textcircled{X}$ auf der $(n+r)$ ten Potenz, in $\textcircled{Y}$ aber nur auf der n ten. Wenn man alle Glieder von $\textcircled{Y}$ mit x^r multiplicirt; ſo hat man 2 Gleichungen, worinnen x zu einerlei Potenz vorkommt, nämlich auf der $(n+r)$ ten. Man kann daher nach §. 22 eine 3te daraus machen, worinnen x auf einer niedrigeren Potenz vorkommen muß.

Beispiel.

$$\begin{array}{lcl} \textcircled{X}) x^5 - a^4y = 0 & \textcircled{Y}) x^2 - yx - b^2 = 0 & \\ & \text{mit } x^3 \text{ multiplicirt.} & \\ & \hline & x^5 - yx^4 - b^2x^3 = 0 & \\ \text{Oder } x^5 = yx^4 + b^2x^3 & & \\ \text{Aus } \textcircled{X} \text{ iſt } x^5 = a^4y & & \\ & \hline \text{Daher } yx^4 + b^2x^3 = a^4y. & & \end{array}$$

§. 24.

Durch fortgeſetzte Anwendung von §. 22 und 25 kann man aus 2 Gleichungen, worinnen x und y auf höhern Potenzen vorkommen, endlich eine Gleichung finden, worinnen x nur auf der erſten Potenz vorkommt. Man kann daher x durch y und andere bekannte Gröſſen ausdrücken, und dieſen Werth für x in eine der Hauptgleichungen ſetzen; dadurch alſo

eine

eine Gleichung herstellen, in welcher x gar nicht vorkommt.

Beispiel.

Man verlangt 2 Zahlen zu wissen, von der Beschaffenheit, daß das Product aus ihrer Summe und Differenz gleich a und die Summe ihrer Würfel-Zahlen gleich b sey.

Aus der ersten Bedingung entsteht die Gleichung $(x+y)(x-y) = a$. Wird nach Arithm. §. 33 die Multiplication wirklich vorgenommen; so ist $x^2 - y^2 = a$. Dieser Satz verdient gelegentlich bemerkt zu werden, da er allgemein lehrt, daß *das Product aus der Summe und Differenz zweier Gröſſen der Differenz ihrer Quadrate gleich sey.*

Nach der 2ten Bedingung ist $x^3 + y^3 = b$.

Die beiden Gleichungen folglich sind

$$\S) \quad x^3 + y^3 - b = 0 \quad \text{und} \quad \P) \quad x^2 - y^2 - a = 0$$

Nach §. 23 mit x multiplicirt.

$$\P) \quad x^3 - y^2x - ax = 0$$

Nach §. 22 findet man aus $\S) \quad x^3 = -y^3 + b$

$$\text{aus} \quad \P) \quad x^3 = (y^2 + a)x$$

$$\text{Daher ist} \quad (y^2 + a)x = b - y^3$$

$$\text{Also} \quad \S) \quad x = \frac{b - y^3}{y^2 + a}.$$

Wird

Wird dieser Werth in die Gleichung § substituirt, so erhält man,

$$\text{weil } x^2 = \frac{b^2 - 2by^3 + y^6}{y^4 + 2ay + a^2}$$

$$- y^2 = - \frac{y^6 + 2ay^2 + a^2y^2}{y^4 + 2ay + a^2}$$

$$\text{und } - a = - \frac{ay^4 + 2a^2y + a^3}{y^4 + 2ay + a^2}$$

$$\frac{b^2 - 2by^3 + y^6 - y^6 - 2ay^2 - a^2y^2 - y^4 - 2ay - a^2}{y^4 + 2ay + a^2} = 0$$

Oder wenn man die Gleichung mit dem Nenner multiplicirt und die Glieder mit einander vergleicht und nach y ordnet

$$-3ay^4 - 2by^3 - 3a^2y^2 - a^3 + b^2 = 0$$

$$\text{oder } 3ay^4 + 2by^3 + 3a^2y^2 + a^3 - b^2 = 0.$$

Wird diese Gleichung vollständig geordnet; so heist sie:

$$y^4 + \frac{2b}{3a} y^3 + \frac{3a^2}{3a} y^2 - \frac{b^2 - a^3}{3a} = 0.$$

Aus dieser Gleichung kann y gefunden werden. Es sey z. B. $a = 5$ und $b = 35$; so heist sie

$$y^4 + \frac{14}{3} y^3 + 5y^2 - \frac{220}{3} = 0.$$

Wird

Wird $\frac{z}{3}$ für y nach §. 15 substituirt, und die Gleichung geordnet; so erhält man

$$z^4 + 14z^3 + 45z^2 - 6750 = 0,$$

Deren einzige positive Wurzel $= 6$ ist.

Da nun $z = 6$; so ist $y = 2$.

Aus § findet sich nun dafs $x = 3$.

$$\text{Probe: } (2+3) (3-2) = 5.$$

$$2^3 + 3^3 = 35.$$

Die negativen Wurzeln könnten nun auch entdeckt werden. Ihre Grenze ist 14. Eine selbst liegt zwischen -13 und -14 ; und ihr näherer Werth liesse sich nach §. 19 darstellen.

§. 25.

Schon aus den bisherigen Beispielen hat man abnehmen können, dafs arithmetische Aufgaben auf folgende Weise aufgelöst werden.

1) Es werden die gegebenen Gröfsen von den unbekannten gefondert und letztere durch die letzten Buchstaben des Alphabets ausgedrückt,

2) aus den Bedingungen der Aufgabe so viele Gleichungen hergeleitet, als unbekannte Gröfsen vorkommen

3) und endlich die Gleichungen nach den bisher vorgetragenen Vorschriften behandelt.

Beispiel.

Zweierlei Weine α und β , wo des ersten Preiſs a , und deſſen zweiten b iſt; ſollen ſo gemiſcht werden, daſs der Preiſs des gemiſchten c iſt, vorausgeſetzt, daſs c zwiſchen a und b liegt. a und b können die Preiſſe von einer Kanne, oder Eimer u. ſ. w. ſeyn: man kann überhaupt das zu Grunde liegende Maas 1 nennen.

Die unbekannten Dinge ſind, die Quantitäten, die von α und β zur Miſchung genommen werden: erſtere heiſſe x , die andere y .

Aus den Bedingungen der Aufgabe gehn folgende Operationen hervor:

$$\left. \begin{array}{l} \text{bei } \alpha) \quad 1 : x = a : ax \\ \text{bei } \beta) \quad 1 : y = b : by \end{array} \right\} \text{Arithm. §. 57.}$$

So iſt alſo ax der Preiſs von x und by der Preiſs von y . Wenn nun die Miſchung eine Kanne, 1 Eimer u. ſ. w. ſeyn ſoll; ſo iſt $x + y = 1$ und der Preiſs dieſes Maasſes $= ax + by$. Da dieſer Preiſs $= c$ ſeyn ſoll; ſo iſt alſo $ax + by = c$; dieſe und $x + y = 1$ ſind die beiden Gleichungen, aus denen x und y leicht gefunden wird.

Aus

Aus x weiß man auch y schon; es ist nämlich $= 1 - x$. Hätte man diese Betrachtung gleich zuerst angestellt; so hätte man auch nur mit einer einzigen unbekannten GröÙe zu thun gehabt. Dieser Vortheil kann bei sehr vielen Aufgaben angebracht werden.

Erläuterungen

zum Gebrauche

der Tafeln.

1. **D**ie erste Tafel liefert auf 20 Seiten die gemeinen Logarithmen für alle natürlichen Zahlen von 1 bis 11000.

Die natürlichen Zahlen befinden sich immer in der ersten Spalte einer jeden Seite unter der Ueberschrift N. In der nächsten Spalte unter der Aufschrift o steht der dazu gehörige Logarithme bis auf 6 Decimalstellen ausgedrückt; die Kennziffer ist aber jedesmal weggelassen, weil sie beym Gebrauche der Tafeln leicht supplirt werden kann. Auf diese Art erhält man aber nur die Logarithmen der Zahlen von 100 bis 1000. So findet

O

man

man z. B. auf der 3ten Seite den Logarithmus von $200 = 2. 301030$ und auf derselben Seite in der Mitte l. 225 $= 2. 352182$ und auf der nächsten Seite in der Mitte l. 275 $= 2. 439333$. Auf jeder Seite steht nämlich die Anzahl der Hunderte einer natürlichen Zahl nur oben und sie muß daher bey den übrigen supplirt werden. So bedeutet also 75 auf letzt erwähnter Seite 275. Das nämliche gilt auch von den 2 ersten Ziffern des Anhangs, welche, so lange sie einerley sind, nicht wiederholt da stehen.

Um die Logarithmen für höhere Zahlen zu finden, bedenke man, daß nach Arith. Seite 143 das g (der Anhang) für l r immer gleich bleibt; es mag r von der n ten oder $(m \pm n)$ ten Ordnung seyn. Nur die Kennziffer wird diesem gemäß geändert. Der Logarithmus von 2740 ist daher $= 3. 437751$, wie man leicht aus der ersten und zweyten Spalte der 4ten Seite sieht. Eben so ist der Log. von 2750 $= 3. 439333$.

Außer der Kennziffer haben diese 2 Logarithmen auch noch die 2 ersten Anfangsziffern des Anhangs (43) gemein. Daraus erhellt, daß die Logarithmen der dazwischen liegenden Zahlen 2741, 2742, 2743 u. f. w. alle mit 3. 43..... anfangen müssen. Zu diesen Logarithmen weiß man also schon die 2 ersten Anfangsziffern des Anhangs und man braucht daher nur noch die 4 letzten Endziffern desselben zu erfahren. Diese nun befinden sich in den nächstfolgenden Spalten unter den Aufschriften 1, 2.... 9.

Zu l. 2741 gehören als 4 letzte Endziffern des Anhangs die 4 Zahlen in der Spalte mit der Aufschrift 1, oder 7909.

Zu l. 2742 sucht man dieselben aus der

			Spalte 2 nämlich	8067
— l. 2743	-	-	Spalte 3	- 8226
— l. 2744	-	-	Spalte 4	- 8384
— l. 2749	-	-	Spalte 9	- 9175

Da nun die Kennziffer und die 2 ersten Ziffern des Anhangs für alle Zahlen zwischen 2740 und 2750 einerley sind;

so ist l. 2741 = 3. 437909

l. 2742 = 3. 438067

l. 2743 = 3. 438226

l. 2744 = 3. 438384 u. f. w.

Beyspiel zur Uebung im Aufschlagen.

l. 6045 = 3. 781396 Seite 11

l. 7738 = 3. 888629 — 14

l. 10375 = 4. 0159881 — 19

Die 2 letzten Seiten der Logarithmen - Tafeln enthalten die Logarithmen von 10000 bis 11000 mit 7 Decimal - Stellen.

Noch ist eine Vorsicht in Absicht der 2 ersten Ziffern des Anhangs nöthig. Diese nämlich können in der Ordnung, wie sie zur Spalte 0 und zur Spalte 9 gehören, nach und nach um 1 wachsen. Es wird sogleich bemerkbar, von welcher Spalte an dieses Wachsthum zu zählen ist, weil dort die 4 Endziffern

mit 0 anfangen. Um beym Gebrauch der Tafeln daran zu erinnern ist ein Sternchen * zu solchen Fällen gesetzt worden.

Beyspiele:

l. 2818	=	3. 449941
l. 2819	=	3. 450095
l. 3467	=	3. 539954
l. 3468	=	3. 540079
l. 3469	=	3. 540204
l. 5011	=	3. 699924
l. 5012	=	3. 700011

Durch diese Beispiele wird der Gebrauch dieser Spalten hinlänglich geläufig werden.

3) Wollte man für noch grössere Zahlen die Logarithmen finden; so kann man sich der in der letzten Spalte angebrachten Differenzen bedienen. Ihr Gebrauch wird am besten aus einigen Beyspielen erhellen.

Man verlangt den Logarithmus von 5073,8. Hätte man l. 5073,8, so hätte man auch l. 50738. Aber l. 5053,8 liegt offenbar zwischen l. 5073 und l. 5073. Nun ist aus den Tafeln l. 5073 = 3. 705265
und l. 5074 = 3. 705350

Aus der letzten Spalte sieht man, daß die Differenz beider Logarithmen = 85 ist. Da nun diese Differenzen ziemlich gleich bleiben, so kann man vermöge der Regel de Tri berechnen, um wie viel
l.

l. 5073,8 von l. 5073 verschieden ist. Folgendes wäre der Ansatz.

1 (Die Differenz $5074 - 5073$): $0,8 = (5073,8 - 5073)$
oder 85 (Differenz der Logarithmen): x Daher $x =$
 $85 \cdot 0,8 = 68$.

Daher $l. 5073,8 = l. 5073 + 68 = 3.705265 + 68$
 $= 3.705333$ folgl. $l. 50738 = 4.705333$

Man durfte daher nur 85 mit 0,8 multipliciren, das Product zu l. 5073 addiren und die Kennziffer der natürlichen Zahl gemäß einrichten.

$l. 37854 = 4.578066 + 0,4.115(-46) = 4.578112$

Auf gleiche Art ist daher

$l. 875294 = 5.942107 + 0,94.50(= 47) = 5.942154$

4) Die Logarithmen für 1 bis 100 zu finden, darf man nur das Hundertfache oder Zehnfache der natürlichen Zahlen auffuchen; d. i. wenn z. B. l. 300 bekannt ist, so ist auch l. 3 bekannt. (Wenn man l. 730 kennt, so kennt man auch l. 73).

5) Um die Zahl zu finden die einem Logarithme zugehört, darf man nur das Verfahren umkehren. Ein Beyspiel wird dieses deutlich machen.

Man sucht die Zahl, die zum Logarithm. 3,856332 (Arithm. Seite 147) gehört.

Dafs dieser Logarithmus auf S. 13 vorkommt, findet man bald. Auch fällt aus der Spalte 0 in die
Au.

Augen, daß die zugehörige Zahl zwischen 7180 und 7190 liegt. Aus der Spalte 3 und 4 sieht man, daß die gesuchte Zahl größer sey als 7183 und kleiner als 7184. Der gegebene Log. ist nämlich um 26 größer als 1 7183. Nun ist die Differenz der Logarithmen für consecutive Zahlen aus der letzten Spalte = 60

Daher $60 : 26 = 1 : \frac{26}{60} = 0,433\dots$ Diese Zahl sagt, um wie viel die gesuchte Zahl größer sey, als 7183: sie ist daher = 7183,433...

Zweytes Beyspiel. Der gegebene Logarithmus ist 3. 806460, (Arithm. Seite 150) 1 6404 = 3. 806451, um 9 kleiner als der gegebene. Die Differenz ist $68 \frac{2}{8} = 0,118$. Daher ist die gesuchte Zahl 6404,118

Drittes Beyspiel. Der gegebene Logarithm. ist 7.589332 — 10 1 0,003884 = 7. 589279 — 10, kleiner als der gegebene um 53. Die Differenz ist 112, und $\frac{53}{112} = 0,473$. Daher ist die gesuchte Zahl 0,003884473.

6) Im Buche selber sind Logarithmen gebraucht worden, die bis auf 7 Decimal-Stellen angegeben sind. Sie finden sich in größern Tafeln, deren Gebrauch dem hier gezeigten ganz analog ist. Auf den 2 letzten Seiten befinden sich hier auch solche Logarithmen, die da gute Dienste leisten, wenn der Logarithmus wie Seite 150 mit einer Zahl multiplicirt werden soll. Dort wäre das Product von 12. 1 u nur 0.

o. 204396 geworden wenn man nur o. 017033 für 1 u genommen hätte. Aber wird die 7te Decimalstelle noch bey der Multiplication gebraucht; so ist dieses Product o. 2043996, oder in 6 Decimalstellen o. 204400.

Die 2 folgenden Tafeln enthalten die Quadrate und Würfel aller Wurzeln von 1 bis 1000.

Die Ueberschriften geben die Hunderte der Wurzel an, und die Zahlen in der ersten Spalte die kleinern Theile der Wurzel. Sucht man daher das Quadrat von 348; so nimmt man aus der Spalte, die 400 überschrieben ist; diejenige Zahl, die 48 der ersten Spalte in einer Zeile steht. Dieses ist in diesem Falle die vorletzte Zeile. 348^2 ist daher =

Die Quadrate von Zahlen unter Hundert die weggelassen sind, findet man leicht. Wollte man nämlich 54^2 finden, so dürfte man nur 540^2 aufschlagen; welchem Quadrat man nur seine 2 letzten o nehmen dürfte.

Beyde Tafeln sind bequem zu gebrauchen bey Quadrat und Cubicwurzel, da man das a in §. 46 und 49 sogleich 3ziffrig nehmen kann.

of course, however, when we are given the
in known cases. As will be seen, the
not only the multiplication, but also the
product of the two, or the product of the
two.

Die folgenden Tabelle enthalten die Quotienten
und Wurzeln aller Wurzeln von 1 bis 1000.

Die Ueberstehenden geben die Helligkeit der
Wurzel an, und die Zahlen in der ersten Spalte die
kleinsten Theile der Wurzel. Sucht man daher das
Quadrat von 248; so nimmt man aus der Spalte
die 248 überstehenden in die zweite Spalte, die 48
erster Spalte in die dritte Spalte. Alles in die vierte
Spalte die vorherige Zeile 248 in die fünfte.

Die Quotienten von Zahlen unter 1000 sind
weggelassen, da sie nicht mehr als 1000 sind.
Nur die Zahlen, so klein wie möglich, sind
in der vierten Spalte, man hat keine 1000 in
den Zahlen.

Die Tabelle hat keinen zu gebrauchenden
Quotienten und Wurzeln, da man die 1000 in der
5. Spalte nicht nehmen kann.



Arzberger, Christoph,

Encyclopädischer Cursus der Mathematik ein Lehrbuch für Anfänger und
Liebhaber dieser Wissenschaft

Bd.: 1,1

1802

Coburg, Landesbibliothek -- E I 8
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11942593-1